Trigonometrie.

Lehrbuch und Aufgabensammlung

für Schulen

von

Wilhelm Winter
Professor für Mathematik und Physik am k. alten Gymnasium in Regensburg.

München
Theodor Ackermann
königlicher Hof-Buchhändler
1890.

Trigonometrie.

Lehrbuch und Aufgabensammlung

für Schulen

von

Wilhelm Winter
Professor für Mathematik und Physik am k. alten Gymnasium in Regensburg.

München
Theodor Ackermann
königlicher Hof-Buchhändler
1890.

Vorwort.

In vorliegendem Lehrbuch der Trigonometrie suchte ich die wichtigsten Lehren der elementaren, ebenen und sphärischen Trigonometrie in möglichst einfacher Weise zu entwickeln und mit einer umfangreichen Reihe von Aufgaben zu umgeben.

Da ich die Anwendung der goniometrischen Funktionen auf die Berechnung von Dreiecken erst nach der Durchnahme der Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen beginnen wollte, so suchte ich diese, die Goniometrie, durch Aufgaben über Berechnung trigonometrischer Funktionen passender Winkel zu beleben, da diese einerseits zur Einübung der trigonometrischen Begriffe, andererseits zur Repetition geometrischer Sätze (Kreisteilung) und schließlich zur Fertigkeit im algebraischen Rechnen (Wurzelreduktionen, Gleichungen) dienen.

Die Erklärung der logarithmisch-trigonometrischen Tafeln glaubte ich dem Lehrer überlassen zu sollen und die Entwickelung trigonometrischer Reihen als nicht elementar ganz weglassen zu dürfen. Bei Auswahl der Aufgaben besonders über das schiefwinkelige Dreieck sah ich mehr darauf, daß das Problem einem in der Anwendung vorkommenden Fall entspreche und zu einer sicheren Anwendung des Gelernten führe, als darauf, daß zur Lösung eine besonders verwickelte Operation notwendig sei.

In der sphärischen Trigonometrie suchte ich mich auf das notwendigste zu beschränken, dies aber durch Anfügung

ausgerechneter Beispiele so zu festigen, daß der Schüler die mannigfach auftauchenden Hindernisse zu überwinden lernt. Die beigefügten Aufgaben erfordern vielfach Kenntnisse aus der mathematischen Geographie und Astronomie und ich glaubte, eine Einführung in dieselbe an dieser Stelle nicht geben zu sollen, da eine Behandlung solcher Aufgaben ohne vorhergegangenen Unterricht in der Astronomie doch unnütz und zwecklos ist.

Regensburg, um Ostern 1889.

Der Verfasser.

Inhaltsübersicht.

Aufgaben.

1. Abschnitt.

Goniometrie.

1.

Einleitung.

Die Trigonometrie ist die Lehre von der Berechnung der in einem Dreieck (oder Vieleck) vorkommenden Größen (Strecken, Winkel, Flächen) aus den das Dreieck (Vieleck) bestimmenden Größen (Strecken, Winkeln, Flächen). Da hiebei sowohl unter den gegebenen als unter den gesuchten Größen ungleichartige Größen vorkommen, nämlich Strecken und Winkel (wenn wir zunächst von den Flächen absehen), so müssen zuerst Beziehungen zwischen denselben aufgesucht werden, d. h. es muß untersucht werden, in welcher Art man aus der Größe eines Winkels auf die Größe von Strecken und umgekehrt schließen kann.

Aus der Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren ist bekannt, daß ein Winkel ein formbildendes Element der ebenen Figuren ist, daß aber auch das Verhältnis von Seiten oder Strecken ein formbildendes Element ist. Man wird also untersuchen, in welcher Beziehung die Größe eines Winkels zur Größe des Verhältnisses der von ihm abhängigen Seiten steht. Besonders einfachen Arten solcher Verhältnisse hat man eigene Namen gegeben und nennt sie insgesamt *trigonometrische Funktionen* des Winkels.

2.

Die trigonometrischen Funktionen.

Durch die Größe des Winkels α ist die Form des rechtwinkligen Dreieckes ABC vollständig bestimmt, also ist dadurch

auch die Größe des Verhältnisses zweier Seiten bestimmt. Solange α sich nicht ändert, behält das Verhältnis zweier Seiten denselben Wert, wenn auch die Seiten sich ändern, denn es ist:

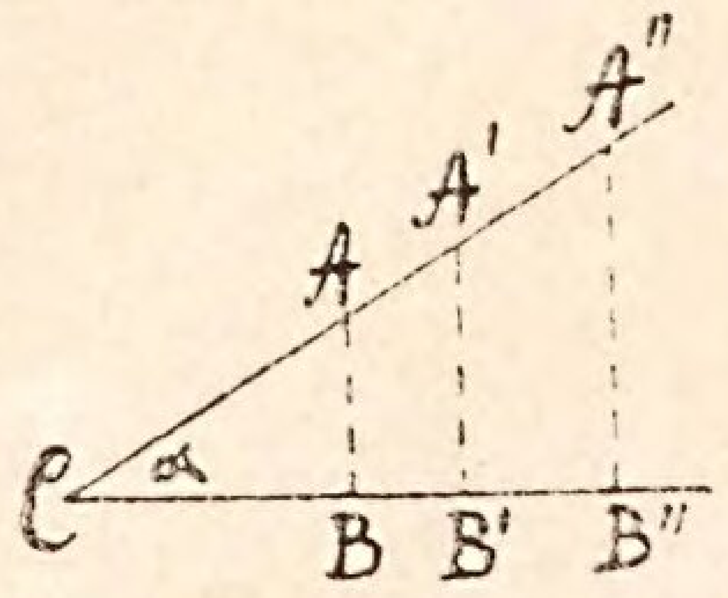


Fig. 1.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C} = \frac{A''B''}{A''C} \text{ etc. ebenso}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C} = \frac{A''B''}{B''C} = \text{etc.}$$

Aendert sich aber der Winkel α, so ändert sich jedes Verhältnis der Seiten. Deshalb ist das Verhältnis der Seiten eine Funktion der Größe des Winkels. (Jede Größe z. B. ein solches Seitenverhältnis, welche ihrem Werte nach abhängt vom Werte einer anderen Größe, z. B. des Winkels, nennt man eine Funktion dieser Größe, und zwar eine stetige Funktion, wenn sie sich stetig ändert, solange die andere Größe z. B. der Winkel sich stetig ändert.)

Man hat folgende Funktionen eingeführt:

1. Der Sinus ist das Verhältnis der dem Winkel gegenüberliegenden Kathete zur Hypotenuse

$$\sin \alpha = \frac{AB}{AC};$$

2. Der Cosinus ist das Verhältnis der anliegenden Kathete zur Hypotenuse.

$$\cos \alpha = \frac{BC}{AC};$$

3. Die Tangente (tangens) ist das Verhältnis der gegenüberliegenden Kathete zur anliegenden.

$$\text{tang}\, \alpha = \frac{AB}{BC};$$

4. Die Cotangente (cotangens) ist das Verhältnis der anliegenden Kathete zur gegenüberliegenden.

$$\text{cotg}\, \alpha = \frac{BC}{AB}.$$

Außer diesen waren früher noch die Sekante und Kosekante

eingeführt und durch $\sec\alpha = \frac{CA}{CB}$ und $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{CA}{AB}$ definiert; doch sind dieselben ganz außer Gebrauch gekommen.

Sind die Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes bekannt, so können daraus die Werte der trigonometrischen Funktionen berechnet werden.

Beispiel. Ist $\alpha = 30^0$ und bezeichnet man die Hypotenuse mit a, so ist die gegenüberliegende Kathete $= \frac{1}{2}a$, die anliegende $= \frac{1}{2}a\sqrt{3}$; hieraus ist:

$$\sin 30^0 = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2};\ \cos 30^0 = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3};$$

$$\operatorname{tang} 30^0 = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3};\ \operatorname{cotg} 30^0 = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{3}.$$

Aufgabe. Berechne ebenso die Funktionen von 45^0, 60^0, 18^0 (reguläres Zehneck) und 72^0 $(= 90^0 - 18^0)$.

Die nächste Aufgabe ist nun, die Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen aufzusuchen, also Beziehungen zwischen den Funktionen desselben Winkels, dann zwischen denen verschiedener Winkel aufzustellen, ferner die Aenderungen der Funktionen, welche durch Aenderung des Winkels hervorgebracht werden, zu betrachten, schließlich die Werte der Funktionen für die verschiedenen Werte des Winkels zu berechnen und dadurch zur Erkenntnis zu kommen, daß das, was ein Winkel als formbildendes Element zur Bestimmung einer Figur beiträgt, in Zahlen ausgedrückt werden kann als ein Seitenverhältnis, und daß umgekehrt aus der Größe eines Seitenverhältnisses wieder auf die Größe des Winkels geschlossen werden kann. All dies ist Aufgabe der Goniometrie, der Winkelmessung. Würden die Seitenverhältnisse, die trigonometrischen Funktionen, bei gleichmäßiger Aenderung des Winkels sich auch gleichmäßig ändern, wären sie also den Winkeln proportional, so könnten wir sie ein einfaches Maß derselben nennen; da dies nicht der Fall ist, so können wir sie nur als ein veränderliches Maß der Winkel bezeichnen; können sie aber nicht entbehren, weil nur sie uns in den Stand setzen, von der Größe des Winkels auf die Größe von Strecken zu schließen. Hieran schließt sich

dann die eigentliche Trigonometrie, oder Dreiecksmessung, welche lehrt, daß und wie die trigonometrischen Funktionen dadurch, daß sie ein Maß für die formbildende Eigenschaft der Winkel geben, in Verbindung mit den anderen Bestimmungsstücken des Dreiecks, befähigt sind und ausreichen, die noch fehlenden Bestimmungsstücke des Dreiecks auszurechnen. Die Trigonometrie löst dann auch die umgekehrte Aufgabe, aus der Größe der Seiten die Werte der trigonometrischen Funktionen und dadurch die Winkel zu finden.

3.

Gleichungen zwischen den trigonometrischen Funktionen.

Zwischen den trigonometrischen Funktionen eines Winkels finden stets folgende Gleichungen statt:

I. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

Denn $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2}$
$= \frac{AC^2}{AC^2} = 1.$

II. $\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$

Denn $\operatorname{tang}\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{AB : AC}{BC : AC} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$

III. $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tang}\alpha}.$

Denn $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{AB : BC} = \frac{1}{\operatorname{tang}\alpha}.$

Statt III kann man auch nehmen: $\operatorname{cotg}\alpha . \operatorname{tang}\alpha = 1,$ oder $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$

Mittels dieser 3 Fundamentalgleichungen kann man, wenn eine Funktion bekannt ist, die anderen berechnen. Man findet:

1. wenn $\sin\alpha$ gegeben ist, so ist:

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}, \quad \operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}},$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha};$$

2. wenn cos α gegeben ist, so ist:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha},\quad \operatorname{tang}\alpha = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha},$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}};$$

3. wenn tang α gegeben ist, so ist:

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha}},\quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha}},$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tang}\alpha};$$

4. wenn cotg α gegeben ist, so ist:

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}},\quad \cos\alpha = \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}},$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}.$$

Uebungsbeispiele: 1. Aus $\sin 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\operatorname{tang} 60^0 = \sqrt{3}$, $\operatorname{cotg} 45^0 = 1$, $\cos 18^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, $\operatorname{tang} 72^0 = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$, berechne man die anderen Funktionen dieser Winkel.

2. Aus $\sin 22\frac{1}{2}^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ (Achteck) und aus $\cos 15^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ (Zwölfeck) berechne man die anderen Funktionen dieser Winkel. (Aus denselben Dreiecken ergeben sich die Funktionen von $67\frac{1}{2}^0$ und 75^0.)

3. Wenn $\sin\alpha = \frac{a-b}{a+b}$, oder wenn $\cot\alpha = \frac{2ab}{a^2-b^2}$, wie groß sind dann die anderen Funktionen von α?

4.

Funktionen zusammengesetzter Winkel.

Aus den Funktionen zweier Winkel soll die Funktion der Summe oder der Differenz dieser Winkel abgeleitet werden.

Wir machen dabei zunächst die Beschränkung, daß jeder der Winkel α und β, und auch deren Summe $\alpha+\beta$ noch kleiner als 90^0 sein soll.

I. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$.

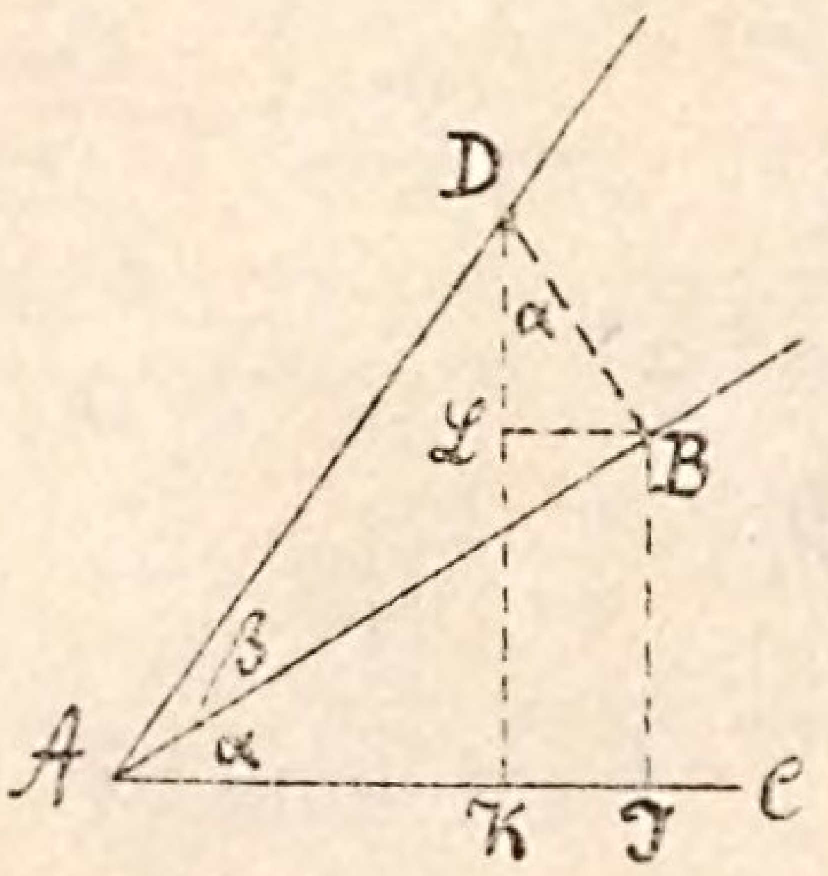


Fig. 2

Beweis. Es sei $BAC = \alpha$, $DAB = \beta$, $DAC = \alpha + \beta$, so mache man $DK \perp AC$, $DB \perp AB$, $BJ \perp AC$, $BL \# AC$, also $BL \perp DK$; dann ist $\sin(\alpha + \beta) = \sin DAC$ $= \frac{DK}{AD} = \frac{DL + LK}{AD} = \frac{DL}{AD} + \frac{BJ}{AD}$.

Nun ist aber: $\frac{DL}{DB} = \cos\alpha$,

also $DL = DB \cos\alpha$,

und $\frac{BJ}{AB} = \sin\alpha$, also $BJ = AB \sin\alpha$;

beides eingesetzt gibt:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{DB}{AD} \cdot \cos\alpha + \frac{AB}{AD} \sin\alpha$$

$$= \sin\beta \cos\alpha + \cos\beta \sin\alpha;$$ also wie oben.

II. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$.

Beweis. Bei Benützung derselben Figur und Konstruktion ist $\cos(\alpha + \beta) = \cos DAC = \frac{AK}{AD} = \frac{AJ - KJ}{AD} = \frac{AJ}{AD} - \frac{LB}{AD}$.

Nun ist aber: $\frac{AJ}{AB} = \cos\alpha$; $AJ = AB. \cos\alpha$

und $\frac{LB}{DB} = \sin\alpha$; $LB = DB. \sin\alpha$;

beides eingesetzt gibt:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{AB}{AD} \cos\alpha - \frac{DB}{AD} \sin\alpha$$

$$= \cos\beta \cos\alpha - \sin\beta \sin\alpha,$$ also wie behauptet.

I a. $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$.

Beweis. Es sei $BAC = \alpha$, $BAD = \beta$, $DAC = \alpha - \beta$, so mache man $DJ \perp AC$, $DK \perp AB$, $KL \perp AC$, $DM \# AC$, also $DM \perp KL$, so ist $MKD = KAL = \alpha$, und man hat:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin DAC = \frac{DJ}{AD} = \frac{ML}{AD} = \frac{KL}{AD} - \frac{KM}{AD}.$$

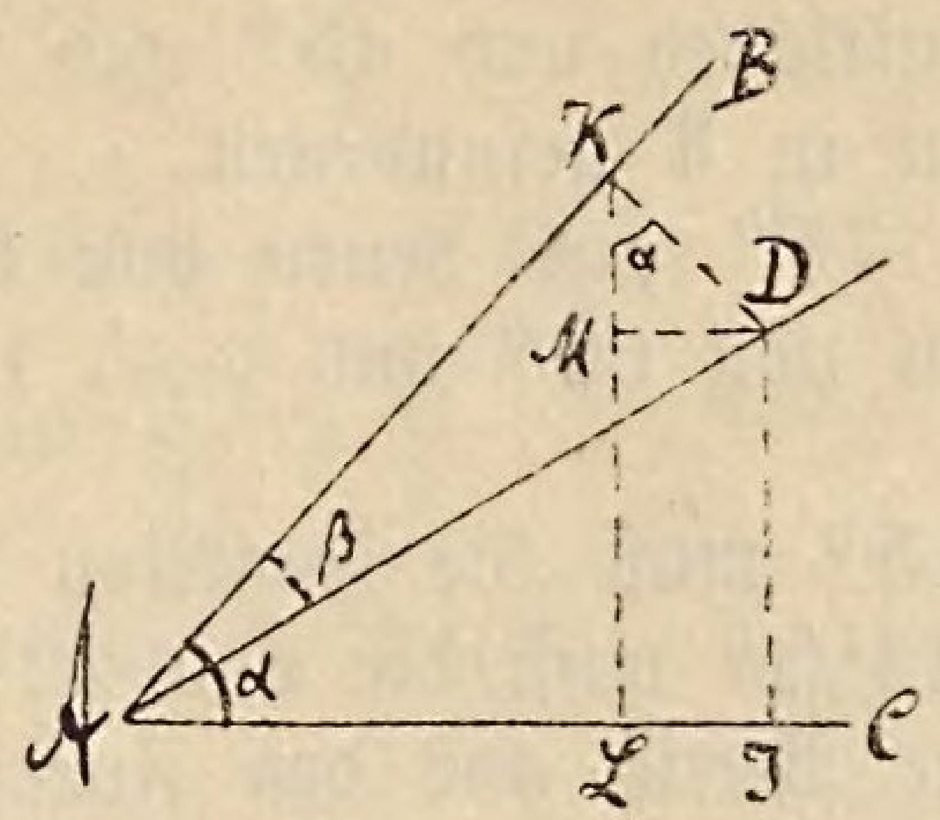


Fig. 3.

Nun ist aber:

$$\frac{KL}{AK} = \sin\alpha,\ KL = AK \sin\alpha,$$

und

$$\frac{KM}{KD} = \cos\alpha,\ KM = KD \cos\alpha;$$

beides eingesetzt gibt:

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{AK}{AD}\sin\alpha - \frac{KD}{AD}\cos\alpha,$$

$\sin(\alpha - \beta) = \cos\beta \sin\alpha - \sin\beta \cos\alpha$, also wie oben.

II a. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$.

Beweis. Bei Benützung derselben Figur und Konstruktion ist $\cos(\alpha - \beta) = \cos DAC = \frac{AJ}{AD} = \frac{AL + LJ}{AD}$ $= \frac{AL}{AD} + \frac{MD}{AD}$.

Nun ist aber: $\frac{AL}{AK} = \cos\alpha,\ AL = AK.\cos\alpha,$

$$\frac{MD}{KD} = \sin\alpha,\ MD = KD.\sin\alpha;$$

beides eingesetzt gibt:

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{AK}{AD}\cos\alpha + \frac{KD}{AD}\sin\alpha$$

$= \cos\beta \cos\alpha + \sin\beta \sin\alpha$; also wie oben.

III. $\operatorname{tang}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tang}\alpha \pm \operatorname{tang}\beta}{1 \mp \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta}$.

Beweis. Es ist $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)}$ $= \frac{\sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta}$; dividiert man Zähler und Nenner mit $\cos\alpha \cos\beta$, so ergibt sich mit 3 Formel II obige Formel.

IV. $\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta \mp 1}{\operatorname{cotg}\beta \pm \operatorname{cotg}\alpha}$.

Beweis analog III. (Drücke auch III durch die cotg, und IV durch die tang von α und β aus.)

Aufgaben. 1. Berechne die Funktionen von 75^0 und von 15^0 mittels der in **2** gefundenen Funktionen von 45^0 und von 30^0 und vergleiche ihre Werte mit den in **3** gefundenen.

2. Berechne die Funktionen von 75^0 aus denen von 60^0 und 15^0, und die von 45^0 aus denen von 60^0 und (—) 15^0, oder aus denen von 30^0 und 15^0.

3. Eine Funktion von $30^0 - 15^0$ muß die Funktion von 15^0, und eine Funktion von $45^0 - 22^1/_2{}^0$ muß die von $22^1/_2{}^0$ wiedergeben; man zeige, daß sich die Werte aus den Formeln wirklich ergeben.

4. Man zeige ebenso, daß $\sin(45^0 + 22^1/_2{}^0) = \cos 22^1/_2{}^0$, $\text{tang}(45^0 + 22^1/_2{}^0) = \text{cotg}\, 22^1/_2{}^0$.

5. Welche Werte haben die Funktionen für 90^0, wenn $90^0 = 60^0 + 30^0$ gesetzt wird, oder wenn $90^0 = 45^0 + 45^0$?

6. Man zeige, daß die Funktionen von $75^0 - 15^0$ gleich denen von 60^0.

5.

Funktionen des doppelten Winkels.

Setzt man in $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$ $\beta = \alpha$, so erhält man:

I. $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$.

Ebenso aus $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$ wird

II. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ hieraus (3 I)

II. a. $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ oder

II. b. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$. Ebenso

III. $\text{tang}\, 2\alpha = \dfrac{2\,\text{tang}\,\alpha}{1 - \text{tang}^2\alpha}$ und

IV. $\text{cotg}\, 2\alpha = \dfrac{\text{cotg}^2\alpha - 1}{2\,\text{cotg}\,\alpha}$.

Aufgaben. 1. Berechne $\sin 36^0 = \sin 2 \,.\, 18^0$, $\cos 36^0 = \cos 2 \,.\, 18^0$; berechne dann hieraus $\sin 72^0$ und $\cos 72^0$ und zeige, daß ersterer $= \cos 18^0$, letzterer $= \sin 18^0$ ist.

2. Berechne $\text{tang}\, 30^0$ als $\text{tang}\, 2 \,.\, 15^0$, und $\text{cotg}\, 45^0$ als $\text{cotg}\, 2 \,.\, 22^1/_2{}^0$.

3. Berechne $\text{tang}\, 36^0$ und $\text{cotg}\, 36^0$.

6.

Funktionen des halben Winkels.

Aus $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ berechnet man

$\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$; setzt man hierin $\alpha = \dfrac{a}{2}$, so ist

I. $\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$;

Aus $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ findet man ebenso:

II. $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$.

Durch Division wird:

III. $\operatorname{tang}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$, IV. $\operatorname{cotg}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos a}{1-\cos a}}$.

Beispiel. Ist $a = 45^0$, $\cos a = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, so erhält man aus I $\cos\frac{45^0}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$; setzt man dies wieder in I als $a = \frac{45^0}{2}$, so ist $\cos\frac{45^0}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$; fährt man so fort, so wird $\cos\frac{45^0}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ u. s. w.

Durch Benützung dieser Werte erhält man aus II $\sin\frac{45^0}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\sin\frac{45^0}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$,

$$\sin\frac{45^0}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \text{ u. s. w.}$$

Hieraus bilde man die tang und cotg.

Aufgaben. 1. Aus $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$ berechne man die cos der durch fortgesetztes Halbieren aus 60^0 entstehenden Winkel, dann die sin dieser Winkel.

Berechne ebenso die Funktionen von 9^0, $\frac{9}{2}^0$, $\frac{9}{4}^0$ rc. aus $\cos 18^0$.

7.

Werte der Funktionen in den vier ersten Quadranten.

Wir haben bisher nur spitze Winkel, Winkel des ersten Quadranten untersucht, und dabei diejenigen Strecken, welche zur Bildung der trigonometrischen Funktionen benützt wurden, stets als positiv angenommen. Unter Beibehaltung dieser Bestimmung werden wir die trigonometrischen Funktionen auch für Winkel untersuchen, welche größer als 90^0 sind.

Wir nehmen zu diesem Zwecke an, der Winkel entstehe, indem sich ein beweglicher Strahl AC um seinen Schnittpunkt A

mit einem festen Strahl AB dreht. Unter der Hypotenuse sei ein gewisses Stück AC des beweglichen Strahles verstanden, unter der dem Winkel (α) gegenüberliegenden Kathete ist dann die vom Endpunkt C des beweglichen Strahles auf den festen Strahl oder dessen Verlängerung gefällte Senkrechte zu verstehen, also $C_1 D_1$ im 1. Quadranten, $C_2 D_2$ im 2., $C_3 D_3$ im 3., $C_4 D_4$ im 4. Quadranten. Da hiebei $C_3 D_3$ und $C_4 D_4$ eine von $C_1 D_1$ und $C_2 D_2$ verschiedene Richtung haben, so haben wir $C_3 D_3$ und $C_4 D_4$ als negative Größen anzusehen und erkennen, daß die gegenüberliegende Kathete im 3. und 4. Quadranten negativ ist.

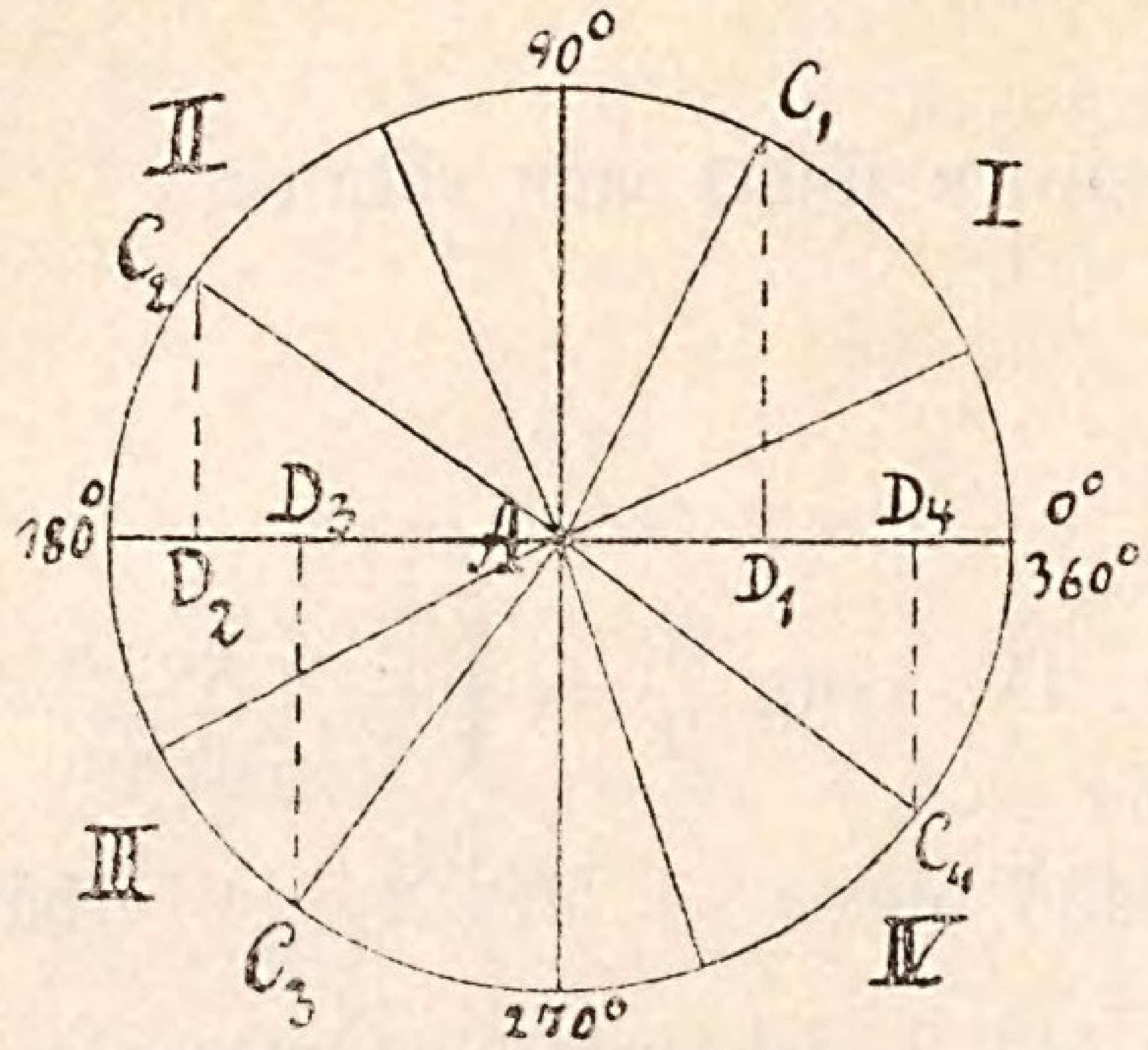


Fig. 4.

Als anliegende Kathete haben wir die Projektion des beweglichen Strahles auf den festen Strahl zu nehmen, also AD_1, AD_2 u. s. w. Da hiebei AD_2 und AD_3 eine von AD_1 und AD_4 verschiedene Richtung haben, so haben wir AD_2 und AD_3 als negativ anzusehen und erkennen, daß die anliegende Kathete im 2. und 3. Quadranten negativ ist.

Nach diesen Festsetzungen über das Vorzeichen der Katheten (die Hypotenuse ist stets als + anzusehen) betrachten wir das Verhalten der trigonometrischen Funktionen in Bezug auf das Vorzeichen, Wachsen oder Abnehmen und die Grenzwerte, wenn der Winkel von 0^0 bis 360^0 wächst.

a. Sinus. Setzt man den beweglichen Schenkel $AC = 1$, so hat der Sinus den Wert der gegenüberliegenden Kathete und zeigt folgendes Verhalten.

$\sin 0^0 = 0$; im 1. Quadranten ist sin positiv und wächst, anfangs mäßig, dann immer langsamer;

$\sin 90^0 = 1$; im 2. Quadranten ist sin positiv und nimmt ab, anfangs sehr langsam, dann rascher, schließlich mäßig;

sin 180° = 0; im 3. Quadranten ist sin negativ und nimmt ab (wird negativ größer), anfangs mäßig, dann immer langsamer;

sin 270° = —1; im 4. Quadranten ist sin negativ und wächst (wird negativ kleiner) anfangs sehr langsam, dann rascher, schließlich mäßig; sin 360° = 0.

Darstellung der Sinuslinie. Mißt man den Winkel durch den zugehörigen Bogen, so kann man den Bogen als gerade Linie darstellen und jeden zugehörigen sin im Endpunkte des Bogens

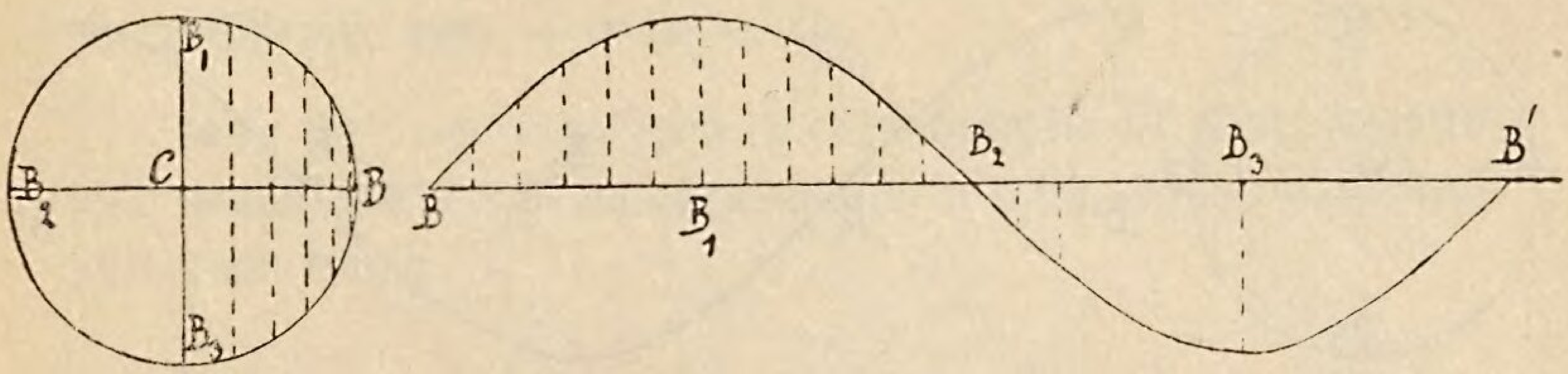


Fig. 5.

als senkrechte Linie (Ordinate) auftragen. Ist z. B. in Figur 5 der Kreis in 24 gleiche Teile geteilt, und die Kreisperipherie als gerade Linie in B B′ aufgetragen, und diese auch in 24 gleiche Teile eingeteilt, so ist ∢ B C 1 gemessen durch arc B 1 und dieser durch B 1 dargestellt; ebenso ist arc B 2 durch BB dargestellt u. s. w. Trägt man nun in den Punkten 0, 1, 2, 3 u. s. w. die zugehörigen Werte des sin der Bögen 0, B 1, B 2, B 3 u. s. w. als Senkrechte (Ordinaten) auf und zwar nach aufwärts oder abwärts je nachdem die Werte des sin + oder — sind, und verbindet die Endpunkte der Ordinaten durch eine stetige Linie, so ist dies die Sinuslinie. Der Wert dieser Darstellung besteht darin, daß man aus der Betrachtung dieser Linie sich ein gutes Bild von dem Verlauf der Funktion, vom Wachsen und Abnehmen ihrer Werte, von ihren negativen Teilen machen kann. Man erkennt leicht: alle Werte des sin liegen zwischen +1 und —1, Bögen, welche gleich weit von 90° oder 270° abstehen, haben gleiche sin, Bögen, welche gleich weit von 180° abstehen, haben gleiche aber entgegengesetzte sin. Die Stücke der Sinuslinie in den einzelnen Quadranten sind kongruent u. s. w. Die Richtigkeit mancher dieser Sätze wird später noch bewiesen werden.

b. Cosinus. Setzt man den Wert des beweglichen Schenkels AC = 1, so hat der Cosinus den Wert der anliegenden Kathete und zeigt folgendes Verhalten.

cos 0° = 1; im 1. Quadranten ist cos positiv und nimmt ab, anfangs sehr langsam, dann rascher, schließlich mäßig.

cos 90° = 0; im 2. Quadranten ist cos negativ und nimmt ab (wird negativ größer), anfangs mäßig, dann immer langsamer.

cos 180° = —1; im 3. Quadranten ist cos negativ und nimmt zu, anfangs sehr langsam, dann rascher, schließlich mäßig.

cos 270° = 0; im 4. Quadranten ist cos positiv und wächst, anfangs mäßig, später immer langsamer.

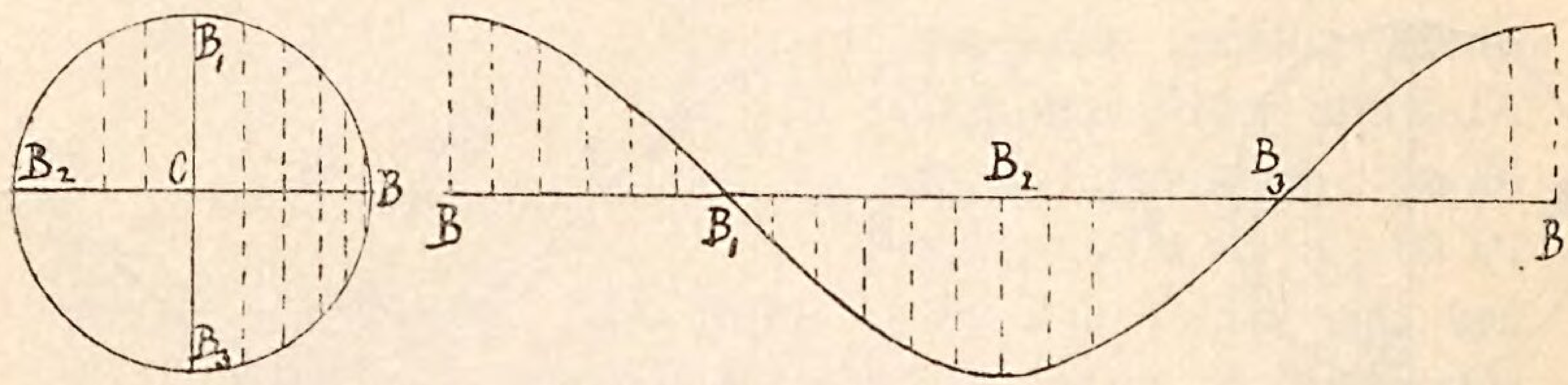


Fig. 6.

D a r s t e l l u n g d e r C o s i n u s l i n i e. Mißt man wieder jeden Winkel durch den Bogen, trägt diesen als gerade Linie und in seinem Endpunkt den Wert des cos als Senkrechte auf, und verbindet die Endpunkte der Ordinaten, so erhält man die Cosinuslinie, welche ähnlichen Zwecken dient wie die Sinuslinie.

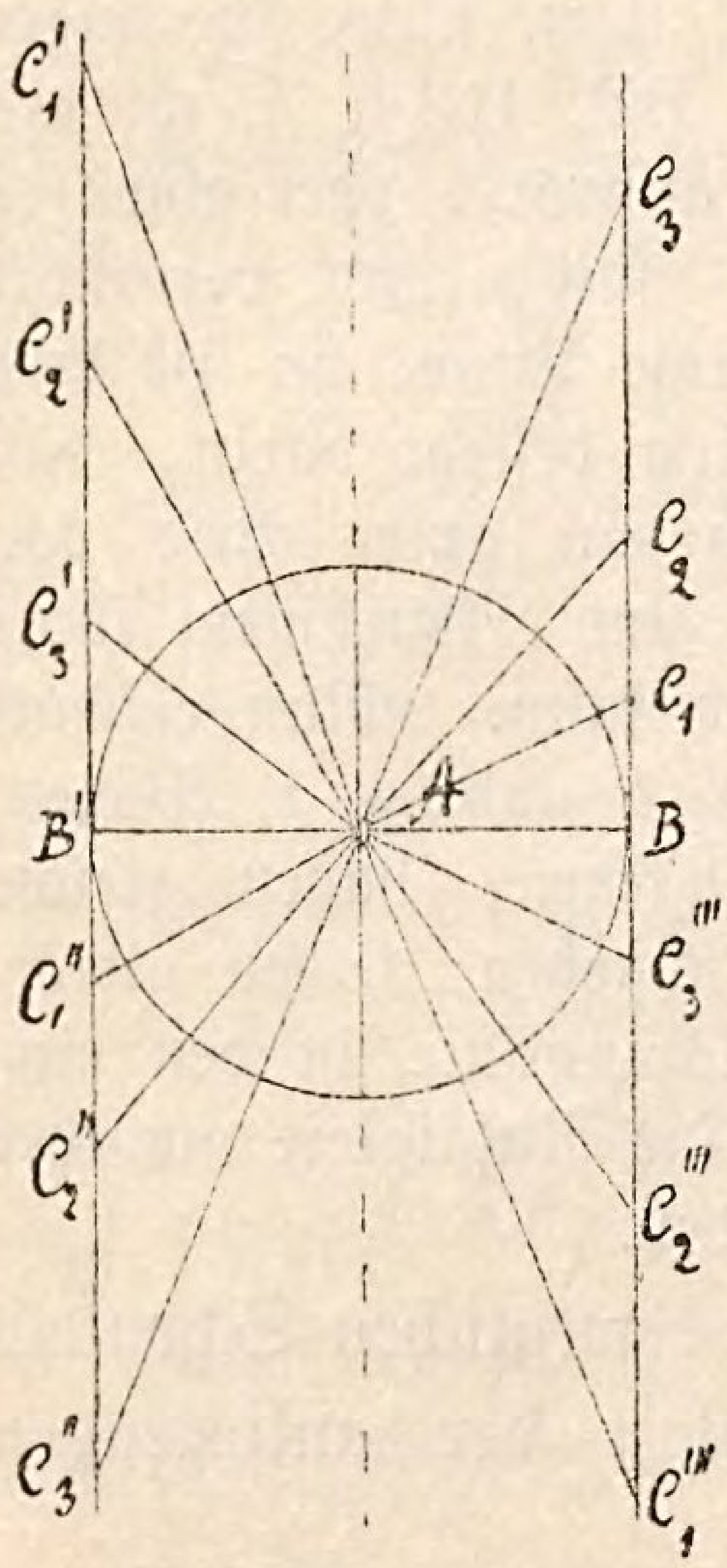


Fig. 7.

c. Tangens. Setzt man den Wert des festen Schenkels AB = 1, und verlängert den beweglichen stets bis zum Durchschnitt mit der auf dem festen Schenkel (oder dessen Verlängerung) im Endpunkte B (resp. B') errichteten Senkrechten, so hat tang den Wert des auf der Senkrechten (Tangente) abgeschnittenen Stückes BC_1, BC_2, BC_3 u. s. w. bei Bestimmung des Vorzeichens ist jedoch auch auf das Vorzeichen der anliegenden Kathete AB resp. AB' zu achten, da letztere negativ ist. Dann zeigt tang folgendes Verhalten

tang 0° = 0; im 1. Quadranten ist tang positiv und wächst anfangs mäßig, dann immer rascher. Die Strecke

BC wird bei wachsendem Winkel immer größer, und wächst, wenn der Winkel sich 90° nähert, über alle Grenzen; deshalb ist tang 90° = ∞. Denkt man sich den Winkel nur um ein kleinstes über 90° wachsen, so schneidet der bewegliche Schenkel nun die in B′ errichtete Senkrechte (Tangente) und da BC′ positiv, AB′ aber negativ, so ist tang negativ. Bei 90° ist BC′ selbst noch über alle Grenzen groß, also muß man tang 90° auch = — ∞ nehmen; es ist also tang 90° = ± ∞ und man sagt tang macht bei wachsendem Winkel bei 90° einen Sprung vom + ∞ in — ∞.

tang 90° = ± ∞; im 2. Quadranten ist tang negativ und wächst aus — ∞ anfangs ungemein rasch, dann langsamer, schließlich mäßig.

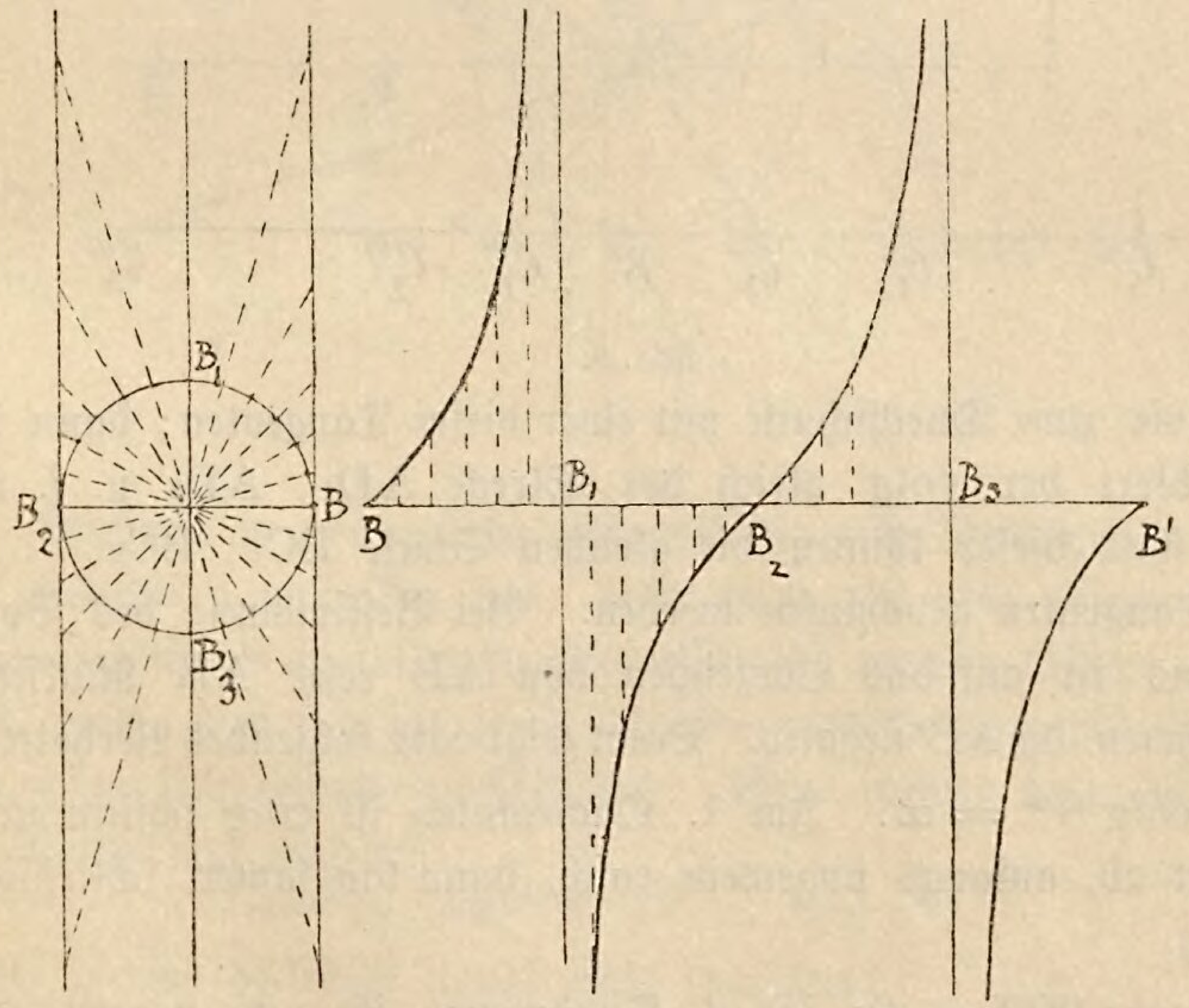


Fig. 8.

tang 180° = 0. Für den dritten Quadranten ist sowohl B′C″ als B′A negativ, folglich ist tang positiv und wächst, anfangs mäßig, später immer rascher und geht bei 270° über alle Grenzen; also tang 270° = ±∞. Da im Anfange des 4. Quadranten tang negativ und über alle Grenzen groß ist, so ist

tang 270° = ± ∞ und man sagt, tang macht bei wachsendem Winkel bei 270° einen Sprung von + ∞ in — ∞.

tang 270° = ± ∞. Da im 4. Quadranten BC‴ negativ, AB aber positiv ist, so ist tang negativ und wächst, anfangs ungemein rasch, später langsamer, schließlich mäßig; tang 360° = 0.

Die Darstellung der Tangentenlinie (Fig. 8.) ist der der früheren Linien analog.

d. Cotangens. Um auch bei cotg den Nenner gleich 1 zu bekommen, beschreibt man um A mit dem Radius AB = 1 einen Kreis, legt an denselben zwei Tangenten parallel dem festen Schenkel AD und verlängert den beweglichen Schenkel

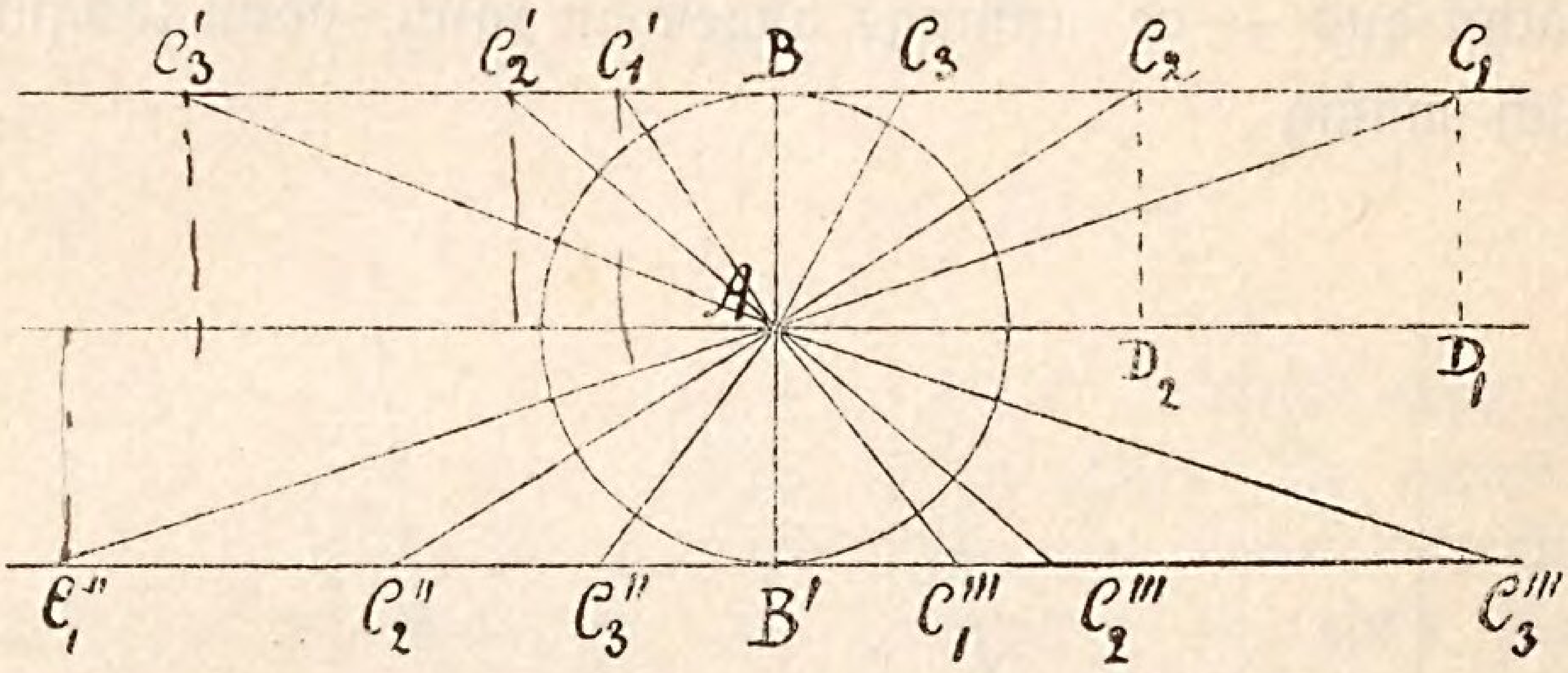


Fig. 9.

stets bis zum Durchschnitt mit einer dieser Tangenten; dann ist der Wert der cotg gleich der Strecke AD_1, AD_2 u. s. w. und statt dieser können die gleichen Stücke BC_1, BC_2, ... der Tangenten genommen werden. Bei Bestimmung des Vorzeichens ist auf das Vorzeichen von AB resp. AB′ Rücksicht zu nehmen, da AB′ negativ. Dann zeigt cotg folgendes Verhalten.

cotg 0° = ∞. Im 1. Quadranten ist cotg positiv und nimmt ab, anfangs ungemein rasch, dann langsamer, schließlich mäßig.

cotg 90° = 0; im 2. Quadranten ist cotg negativ (da BC′ — ist) und nimmt ab, anfangs mäßig, später immer rascher; cot 180° = — ∞ und macht einen Sprung in + ∞.

cotg 180° = ∓ ∞; im 3. Quadranten ist cotg positiv, da B′C″ und AB′ negativ sind und nimmt ab, anfangs ungemein rasch, dann langsamer, schließlich mäßig.

cotg 270° = 0; im 4. Quadranten ist cotg negativ, da

AB' —, nimmt ab, anfangs mäßig, später immer rascher und geht über alle Grenzen; cotg 360° = — ∞. Wächst der Winkel über 360°, so macht cotg bei 360° einen Sprung von — ∞ in + ∞, deshalb ist cotg 360° = ∓ ∞.

Darstellung der Cotangentenlinie analog dem früheren.

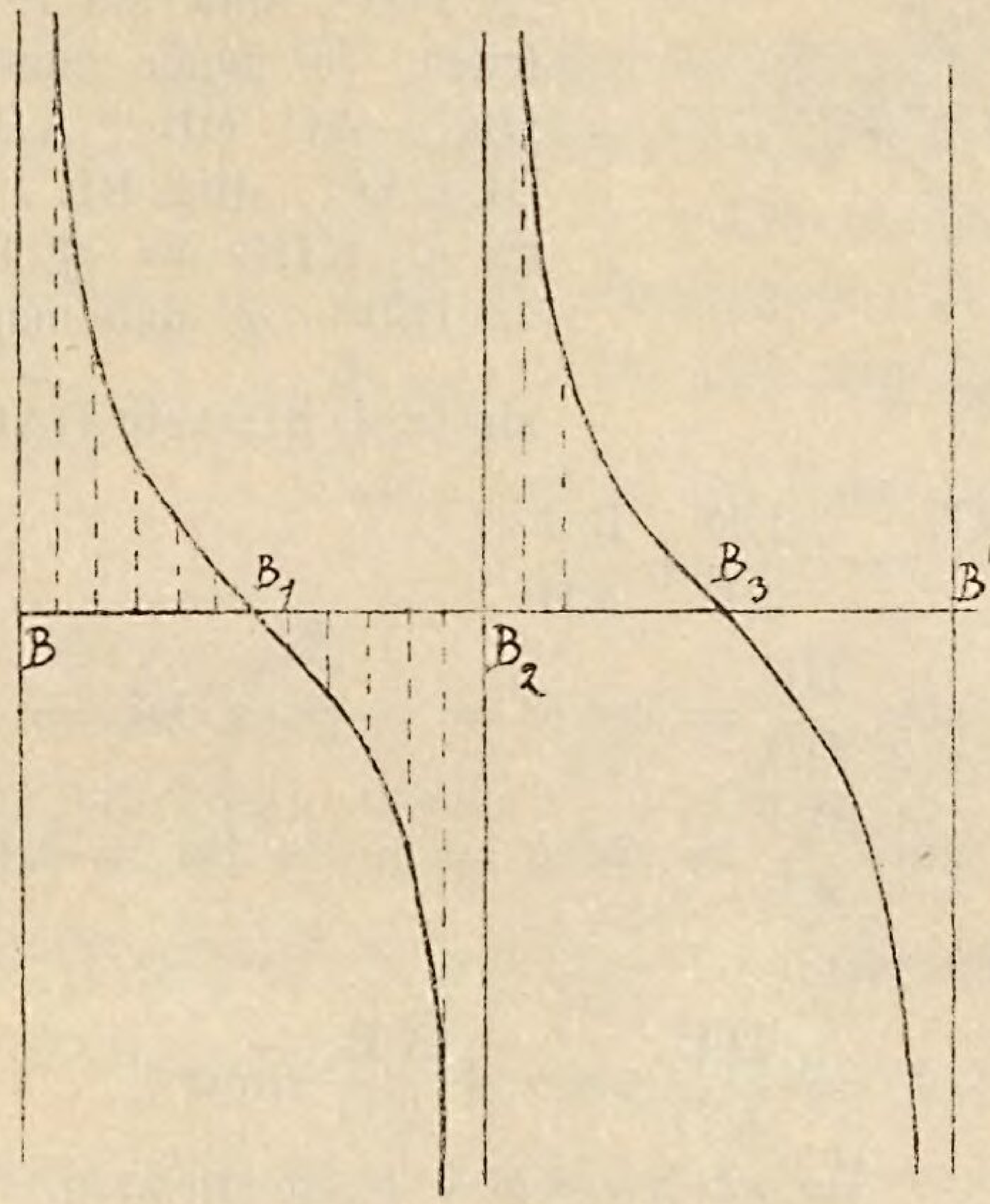


Fig. 10.

Nachdem der bewegliche Schenkel die erste Umdrehung von 0° bis 360° vollendet hat, kann man ihn eine zweite und noch beliebig viele folgende Umdrehungen machen lassen; man sieht leicht, daß sich bei jeder folgenden Umdrehung die Werte der ersten Umdrehung wiederholen. Man spricht dies aus in der allgemeinen Formel

$$\text{trig}\,(n \,.\, 360^0 + \alpha^0) = \text{trig}\,\alpha^0,$$

wobei n eine beliebige ganze Zahl bezeichnet.

Anhang. Nachdem nun die trigonometrischen Funktionen für alle Quadranten definiert sind, ist es nötig zu beweisen, daß die bisher aufgestellten Formeln auch dann noch gelten, wenn die Winkel in beliebigen Quadranten liegen.

Dies gelingt leicht bei den Fundamentalgleichungen von 3 und es zeigt sich, daß in den daraus abgeleiteten Gleichungen $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ u. s. w. die Wurzel mit Doppelzeichen zu

nehmen ist. Die allgemeine Gültigkeit ist nur noch zu beweisen für sin und cos von $\alpha \pm \beta$, da aus diesen Formeln sich die folgenden ableiten. Anstatt der vielen hiezu nötigen Beweise werden nur zwei hier gegeben, die anderen mögen dem eigenen Fleiße überlassen bleiben.

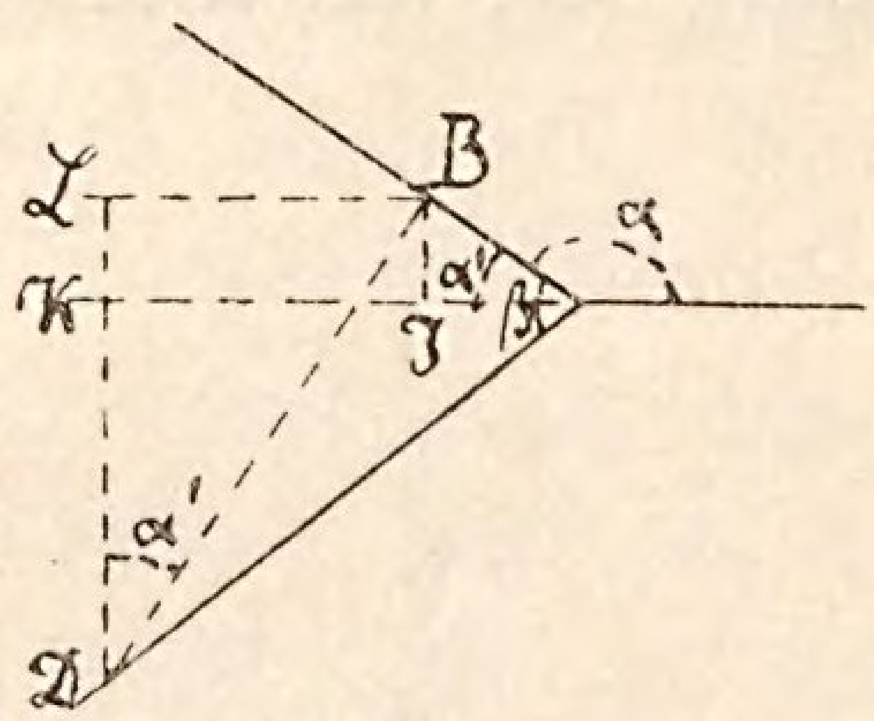


Fig. 11.

Es sei α stumpf, β spitz, $\alpha + \beta > 180^0$, und $\sin(\alpha + \beta)$ abzuleiten, so mache man analog 4 I. $DK \perp AC$, $DB \perp AB$, $BJ \perp AC$, $BL \parallel AC$, also $BL \perp DK$, dann ist $\sphericalangle KDB = \sphericalangle BAK = \alpha' = 180 - \alpha$, und man hat:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \widehat{DAC} = \frac{-KD}{AD}$$

$$= \frac{-LD + KL}{AD} = -\frac{LD}{AD} + \frac{BJ}{AD}.$$

Nun ist aber $\frac{DL}{DB} = \cos\alpha' = -\cos\alpha$, $DL = -DB\cos\alpha$,

und $\frac{BJ}{AB} = \sin\alpha' = \sin\alpha$, $BJ = AB\sin\alpha$;

beides eingesetzt gibt:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{DB}{AD}\cos\alpha + \frac{AB}{AD}\sin\alpha$$

$$= \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha, \text{ q. e. d.}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos DAC = \frac{-AK}{DA} = \frac{-AJ - KJ}{AD} = -\frac{AJ}{AD} - \frac{LB}{AD}.$$

Nun ist aber: $\frac{AJ}{AB} = \cos\alpha' = -\cos\alpha$, $AJ = -AB\cos\alpha$,

und $\frac{LB}{DB} = \sin\alpha' = \sin\alpha$, $LB = DB\sin\alpha$;

beides eingesetzt gibt:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{AB}{AD}\cos\alpha - \frac{DB}{AD}\sin\alpha = \cos\beta\cos\alpha -$$

$\sin\beta\sin\alpha$, q. e. d.

Aufgaben. 1. Berechne nach 5 Funktionen von $120^0 = 2 \,.\, 60^0$, von $150^0 = 2 \,.\, 75^0$, von $144^0 = 2 \,.\, 72^0$, von $300^0 = 2 \,.\, 150^0$ und ähnliche.

2. Berechne $\cos 105^0 \, (= 60^0 + 45^0)$, $\text{tang } 105^0 \, (= 75^0 + 30^0)$, $\text{cotg } 112^1/_2{}^0 \, (= 67^1/_2{}^0 + 45^0)$ und ähnliche.

8.

Zurückführung von Funktionen beliebiger Winkel auf Funktionen spitzer Winkel.

Die Funktionen beliebiger Winkel lassen sich alle auf Funktionen von spitzen Winkeln zurückführen.

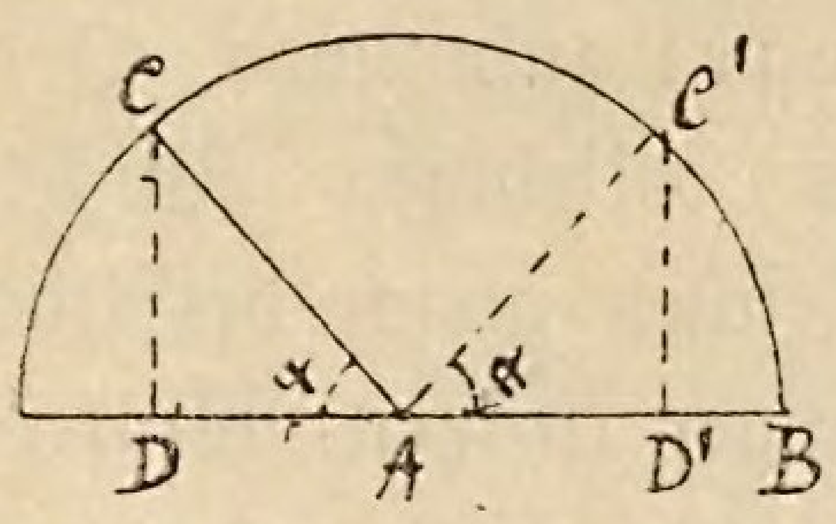


Fig. 12.

a. Einen Winkel CAB des zweiten Quadranten betrachte man als $180^0 - \alpha = 180^0 - CAD$, mache $C'AB = \alpha$, ziehe die Senkrechten, so ist $\triangle CAD \cong \triangle C'AD'$, und man hat:

$$\sin CAB = \sin(180^0 - \alpha) = \frac{CD}{AC} = \frac{C'D'}{AC'} = \sin\alpha,$$

$$\cos CAB = \cos(180^0 - \alpha) = \frac{AD}{AC} = \frac{-AD'}{AC'} = -\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tang} CAB = \operatorname{tang}(180^0 - \alpha) = \frac{CD}{AD} = \frac{CD'}{-AD'} = -\operatorname{tang}\alpha,$$

$$\operatorname{cotg} CAB = \operatorname{cotg}(180^0 - \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha.$$

Setzt man $CAB = \omega$, $CAD = C'AB = 180^0 - \omega$, so hat man $\sin\omega = \sin(180^0 - \omega)$; $\cos\omega = -\cos(180^0 - \omega)$ $\operatorname{tang}\omega = -\operatorname{tang}(180^0 - \omega)$, $\operatorname{cotg}\omega = -\operatorname{cotg}(180^0 - \omega)$.

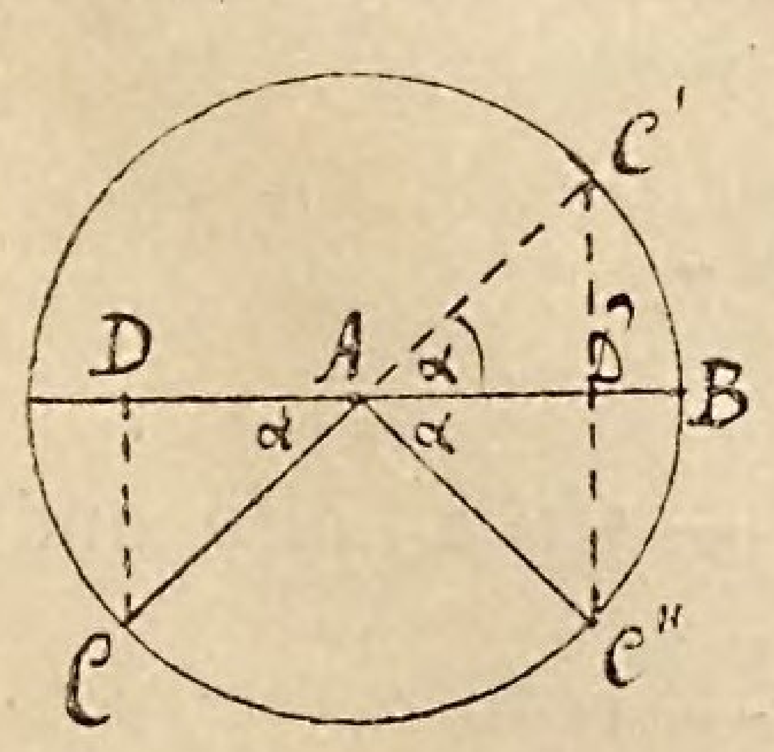


Fig. 13.

b. Einen Winkel $\widehat{CAB}$ des dritten Quadranten betrachtet man als $180^0 + \alpha = 180^0 + DAC$, macht $DAC = C'AD'$, zieht die Senkrechten, so ist $\triangle DAC \cong \triangle D'AC'$, und man hat:

$$\sin(180^0 + \alpha) = \frac{DC}{AC} = \frac{-D'C'}{AC'} = -\sin\alpha$$

$$\cos(180^0 + \alpha) = \frac{DA}{AC} = \frac{-D'A}{AC'} = -\cos\alpha; \text{ hieraus}$$

$$\operatorname{tang}(180^0 + \alpha) = \operatorname{tang}\alpha, \quad \operatorname{cotg}(180^0 + \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha.$$

c. Einen Winkel BAC'' des vierten Quadranten betrachtet man als $360^0 - \alpha = 360^0 - D'AC''$, so ist ebenso:

$$\sin(360^\circ - \alpha) = \frac{D'C''}{AC''} = \frac{-D'C'}{AC'} = -\sin\alpha,$$

$$\cos(360^\circ - \alpha) = \frac{AD'}{AC''} = \frac{AD'}{AC'} = \cos\alpha;\ \text{hieraus}$$

$$\tan(360^\circ - \alpha) = -\tan\alpha,\ \cot(360^\circ - \alpha) = -\cot\alpha.$$

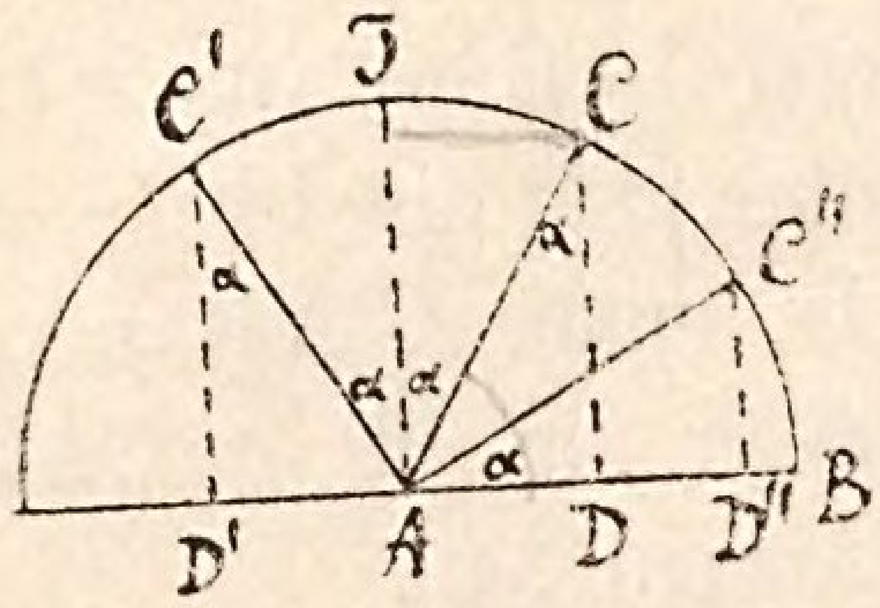


Fig. 14.

Die Formeln von a, b, c faßt man in die Regel zusammen: Jede Funktion eines beliebigen Winkels ist bis auf's Zeichen gleich derselben Funktion desjenigen (spitzen) Winkels, um welchen er von 180° oder von 360° absteht.

a'. Betrachtet man einen Winkel BAC des ersten Quadranten als $90^\circ - \alpha = 90^\circ - JAC$, macht $BAC'' = JAC$, und zieht die Senkrechten CD und C''D'', so ist $\triangle ACD \cong \triangle AC''D''$, und man hat:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{CD}{AC} = \frac{AD''}{AC''} = \cos\alpha,$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{AD}{AC} = \frac{C''D''}{AC''} = \sin\alpha,\ \text{also auch}$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot\alpha,\ \cot(90^\circ - \alpha) = \tan\alpha.$$

b'. Betrachtet man einen Winkel BAC' des zweiten Quadranten als $90^\circ + \alpha = 90^\circ + C'AJ$, und konstruiert analog, so ist:

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \frac{C'D'}{AC'} = \frac{AD''}{AC''} = \cos\alpha,$$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = \frac{AD'}{AC'} = \frac{-C''D''}{AC''} = -\sin\alpha,\ \text{also auch}$$

$$\tan(90^\circ + \alpha) = -\cot\alpha,$$

$$\cot(90^\circ + \alpha) = -\tan\alpha.$$

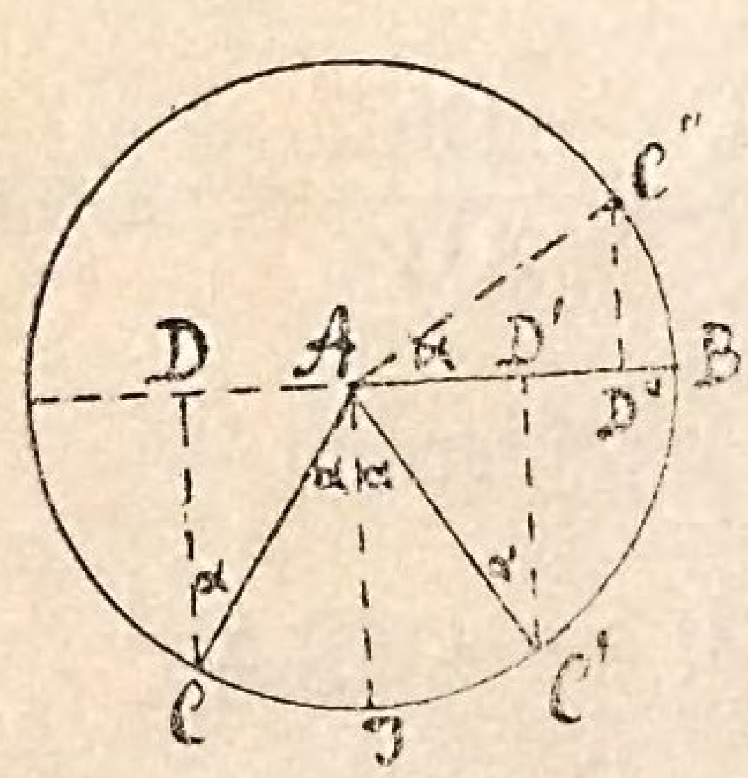


Fig. 15.

c'. Betrachtet man einen Winkel $\overset{\frown}{BAC}$ des dritten Quadranten als $270^\circ - \alpha = 270^\circ - JAC$, macht $\sphericalangle BAC'' = \sphericalangle JAC$, zieht die Senkrechten CD und C''D'', so ist $\triangle ACD \cong \triangle AC''D''$, und man hat:

$$\sin(270^0 - \alpha) = \frac{CD}{AC} = \frac{AD''}{AC''} = -\cos\alpha$$

$$\cos(270^0 - \alpha) = \frac{DA}{CA} = \frac{-C''D''}{AC''} = -\sin\alpha,$$ also auch

$$\text{tang}(270^0 - \alpha) = \text{cotg}\,\alpha, \quad \text{cotg}(270^0 - \alpha) = \text{tang}\,\alpha.$$

d'. Betrachtet man einen Winkel $\widehat{BAC'}$ des vierten Quadranten als $270^0 + \alpha = 270^0 + JAC'$, und construirt analog, so ist

$$\sin(270^0 + \alpha) = \frac{C'D'}{AC'} = \frac{-AD''}{AC''} = -\cos\alpha;$$

$$\cos(270^0 + \alpha) = \frac{AD'}{AC'} = \frac{C''D''}{AC''} = \sin\alpha,$$ also auch

$$\text{tang}(270^0 + \alpha) = -\text{cotg}\,\alpha, \quad \text{cotg}(270^0 + \alpha) = -\text{tang}\,\alpha.$$

Die Formeln von a'b'c'd' faßt man in die Regel zusammen: Jede Funktion eines Winkels ist bis auf's Zeichen gleich der Cofunktion desjeniges Winkels, um welchen sich der Winkel von 90° oder 270° unterscheidet.

Negative Winkel. Betrachtet man $\sphericalangle$ BAC als positiven Winkel, welcher durch Drehung des beweglichen Schenkels AC nach aufwärts entstanden ist, so kann man $\sphericalangle$ C'AB als negativen Winkel ansehen, wenn er durch Drehung des beweglichen Schenkels nach abwärts (im entgegensetzten Drehungssinn) entstanden ist. Durch analoge Ableitung findet man:

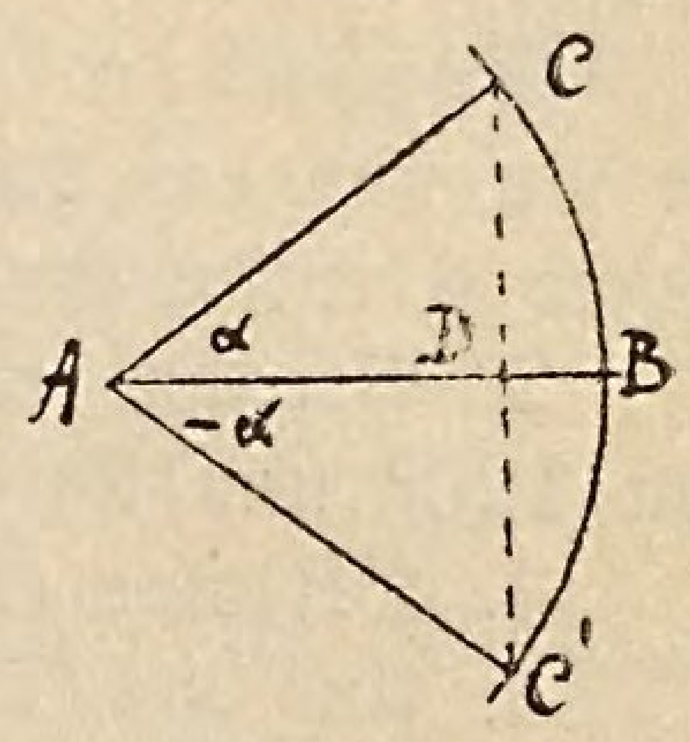


Fig. 16.

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$

$\text{tang}(-\alpha) = -\text{tang}\,\alpha, \quad \text{cotg}(-\alpha) = -\text{cotg}\,\alpha$; man überzeugt sich leicht, daß dieselben Formeln gelten, wenn $\alpha > 90^0$, und findet, daß sie der ersten Regel entsprechen.

Umkehrungen. Soll aus dem gegebenen Wert der Funktion der Winkel gefunden werden, so hat man zu beachten, daß schon innerhalb der ersten vier Quadranten jede Funktion diejenigen Werte, welche sie überhaupt haben kann, zweimal annimmt. So nimmt Sinus die Werte von 0 bis + 1 im 1. aber auch im 2. Quadranten an, die Werte von 0 bis — 1 hat er im 3.

und auch im 4. Quadranten. Weiß man also, daß der Sinus eines Winkels einen gewissen Wert hat, z. B. $\sin x = 1/2$, so ist dadurch der Winkel x nicht eindeutig bestimmt, sondern schon innerhalb der ersten vier Quadranten doppeldeutig, nämlich $x_1 = 30^0$, $x_2 = 180^0 - 30^0 = 150^0$. Ebenso folgt aus $\cos x = -1/2$, $x_1 = 180^0 - 60^0 = 120^0$, $x_2 = 180 + 60^0 = 240^0$. $\tang x = +1$ liefert $x_1 = 45^0$, $x_2 = 180 + 45^0 = 225^0$, $\cotg x = -\sqrt{3}$ gibt $x_1 = 180^0 - 30^0 = 150^0$, $x_2 = 360^0 - 30^0 = 330^0$.

Sind Winkelwerte außerhalb der ersten vier Quadranten nicht ausgeschlossen, so ergibt sich der Winkelwert sogar als unendlich vieldeutig, da jeder um 360^0 vermehrte oder verminderte Winkel wieder denselben Funktionswert hat.

Z. B. für $\sin x = 1/2$ bekommt man

$$x_1 = 30^0,\ x_1' = 30^0 \pm 360^0,\ x_1'' = 30^0 \pm 2 \cdot 360^0, \ldots$$

$$x_1 = 30^0 \pm n \cdot 360^0$$

$$x_2 = 150^0,\ x_2' = 150^0 \pm 360^0,\ x_2'' = 150^0 \pm 2 \cdot 360^0, \ldots$$

$$x_2 = 150^0 \pm n \cdot 360^0,$$

wobei unter n eine beliebige ganze Zahl zu verstehen ist.

Aufgaben. 1. Nach 5 berechne aus $\sin 72^0$ und $\cos 72^0$ die sin und cos von 144^0 und 288^0 und zeige, daß ihre Werte diesem § entsprechen.

2. Berechne ebenso aus $\sin 60^0$ und $\cos 60^0$ die sin und cos von 120^0 und 240^0.

3. Berechne ebenso $\sin(45^0 + 60^0)$.

4. Aus $\sin(72^0 + 30^0)$ leite die Funktionen für 12^0 ab.

5. Beweise, daß jede Funktion eines Winkels $45^0 + \alpha$ ($135^0 + \alpha$, $225^0 + \alpha$, $315^0 + \alpha$) gleich ist der Cofunktion des Winkels $45^0 - \alpha$ ($135^0 - \alpha$, $225^0\ \alpha$, $315^0 - \alpha$) abgesehen vom Zeichen.

9.

Verwandlung von Summen von Funktionen in Produkte von Funktionen.

Aus $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

und $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ folgt

add. $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$ und

subtr. $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$;

setzt man $\alpha + \beta = a$, $\alpha - \beta = b$,

also $\alpha = \frac{1}{2}(a + b)$, $\beta = \frac{1}{2}(a - b)$, so ist:

$$\text{I. } \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - b)$$

$$\text{II. } \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{1}{2}(a - b).$$

Aus $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$
und $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$ folgt
add. $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos\alpha \cos\beta$ und
subtr. $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin\alpha \sin\beta$;
setzt man wieder $\alpha + \beta = a$, $\alpha - \beta = b$, u. s. w., so ist:

$$\text{III. } \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - b)$$

$$\text{IV. } \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{1}{2}(a - b).$$

Man benützt diese Formeln besonders, um solche goniometrische Formen für logarithmische Rechnung bequem zu machen.

Aehnlich macht man $\sin a + \cos b = \sin a + \sin(90^0 - b)$
$= 2 \sin \frac{1}{2}(a + 90^0 - b) \cos \frac{1}{2}(a - 90^0 + b)$ und verfährt so in ähnlichen Fällen.

Beweise, daß:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = 2 \sin 45^0 \cos(\alpha - 45^0) = \sqrt{2} \cos(\alpha - 45)$$

$$\sin\alpha - \cos\alpha = 2 \cos 45^0 \sin(\alpha - 45^0) = \sqrt{2} \sin(\alpha - 45^0)$$

$$\cos\alpha - \sin\alpha = 2 \cos 45^0 \sin(45^0 - \alpha) = \sqrt{2} \sin(45^0 - \alpha).$$

$$\text{V. } \operatorname{tang}\alpha \pm \operatorname{tang}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}.$$

$$\text{VI. } \operatorname{cotg}\alpha \pm \operatorname{cotg}\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha \sin\beta}.$$

(Ableitung durch 3 und 4.)

Durch Division je zweier Formeln I—IV erhält man:

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} = -\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\frac{\sin\alpha \pm \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)$$

$$\frac{\sin\alpha \pm \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} = -\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta).$$

Schließlich ist $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \cot(\alpha - 45^0)$.

I. Aufgaben.

Man beweise die Richtigkeit folgender Gleichungen:

1. $\frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta} = \operatorname{tang}\alpha \,.\, \operatorname{tang}\beta.$

2a. $\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha};$

2b. $\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{cotg}\alpha = -2\operatorname{cotg} 2\alpha;$

3a. $\sin\alpha + \operatorname{tang}\alpha = 2\cos^2 {}^1/_2\,\alpha \cdot \operatorname{tang}\alpha;$

3b. $\operatorname{tang}\alpha - \sin\alpha = 2\sin^2 {}^1/_2\,\alpha \cdot \operatorname{tang}\alpha;$

4a. $\frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha;$ 4b. $\frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \cot\frac{1}{2}\alpha;$

4c. $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2 - 2\cos\alpha}} = \cos\frac{1}{2}\alpha:$

5a. $\frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} = \operatorname{cotg}(45^0 - \frac{1}{2}\alpha);$

5b. $\frac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha} = \operatorname{tang}(45^0 - \frac{1}{2}\alpha);$

6a. $\frac{\sin\alpha}{1 + \operatorname{tang}\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{2}\cos(\alpha - 45^0)};$

6b. $\frac{\operatorname{tang}\alpha}{1 - \operatorname{tang}\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}\sin(45^0 - \alpha)};$

7a. $\frac{\operatorname{tang}\alpha + 1}{\operatorname{tang}\alpha - 1} = \cot(\alpha - 45^0);$ 7b. $\frac{1 - \operatorname{tang}\alpha}{1 - \operatorname{cotg}\alpha} = -\operatorname{tang}\alpha;$

8. $\frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tg}{}^1/_2\,\alpha}{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}{}^1/_2\,\alpha} = \frac{\sin {}^3/_2\,\alpha}{\sin {}^1/_2\,\alpha};$

9. $\frac{\operatorname{cotg}\alpha \,.\, \operatorname{cotg}{}^1/_2\,\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha \,.\, \operatorname{cotg}{}^1/_2\,\alpha + 1} = \cos\alpha;$

10. $\frac{\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang} 2\alpha}{\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang} 2\alpha + 1} = 2\sin^2\alpha.$

11. $(\sin\alpha + \sin\beta)(\cos\alpha + \cos\beta)$
$$= 2\sin(\alpha+\beta)\cos^2 \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta);$$
12. $(\sin\alpha + \cos\beta)(\cos\alpha + \sin\beta)$
$$= 2\cos(\alpha+\beta)\cos^2(45^0 - \tfrac{1}{2}[\alpha+\beta]);$$
13. $(\sin\alpha \pm \cos\alpha)^2 = 1 \pm \sin 2\alpha;$
14. $(\sin\alpha + \cos\alpha + 1)(\sin\alpha + \cos\alpha - 1) = \sin 2\alpha.$
15. $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}\sin 2(\alpha+\beta)$
16. $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta;$
17. $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta;$
18. $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \tfrac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta);$
19. $\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta) = \tfrac{1}{2}(\sin 2\alpha - \sin 2\beta);$
20. $\sin^2(\alpha\pm\beta) = \sin^2\alpha + \sin^2\beta \pm 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha\pm\beta)$
$$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha\pm\beta);$$
21. $\cos^2(\alpha\pm\beta) = \cos^2\alpha + \sin^2\beta \mp 2\cos\alpha\sin\beta\sin(\alpha\pm\beta)$
$$= \sin^2\alpha + \cos^2\beta - 2\sin\alpha\cos\beta\sin(\alpha\pm\beta).$$

10.

Wenn drei Winkel, α, β, γ, in Summe 180^0 betragen, etwa, weil sie die Winkel eines Dreieckes sind, so gelten für sie folgende Formeln, von denen besonders diejenigen, welche einen Ausdruck in ein Produkt verwandeln, für logarithmische Rechnung von Wichtigkeit sind.

1. $\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta + \operatorname{tang}\gamma = \operatorname{tang}\alpha . \operatorname{tang}\beta . \operatorname{tang}\gamma.$

Denn $\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta + \operatorname{tang}\gamma = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}$
$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma};$$
setzt man $\gamma = 180 - (\alpha+\beta)$, so ist $\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta)$, $\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta)$, also
$$= \frac{-\sin\gamma\cos(\alpha+\beta) + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$
$$= \frac{(-\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta)\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$
$$= \frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} = \operatorname{tang}\alpha . \operatorname{tang}\beta . \operatorname{tang}\gamma.$$

$\sin(\alpha+\beta) = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

2. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma.$

Denn $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

$$+ 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

$$= 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\left[\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) + \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]$$

$$= 2\sin(90 - \frac{1}{2}\gamma.\ 2\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta = 4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma.$$

Aehnlich beweist man das folgende.

3. $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha + \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\beta + \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha . \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\beta . \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma.$

4. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$

5. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{1}{2}\alpha . \sin\frac{1}{2}\beta . \sin\frac{1}{2}\gamma.$

6. $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -(1 + 4\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma.)$

11.

Benützung der trigonometrischen Tafeln.

Im Verlauf der bisherigen Ableitungen hat man erkannt, daß man die trigonometrischen Funktionen für eine große Anzahl von Winkeln berechnen kann, daß man insbesondere durch Anwendung von 4 diese Anzahl leicht vergrößern kann, daß man die noch vorhandenen nicht zu großen Lücken durch Interpolation ausfüllen und sich so eine Tabelle für die Werte der trigonometrischen Funktionen entwerfen könnte.

Dieses ungemein mühselige Verfahren wird jedoch nicht angewandt, da die höhere Mathematik Methoden lehrt, welche auf weitaus einfacherem Wege zum Ziele führen. Mittels solcher Methoden sind die Tabellen der trigonometrischen Funktionen berechnet worden.

Da aber in den meisten Fällen der Verlauf der Rechnung die Anwendung der Logarithmen wünschenswert macht, so enthalten diese Tabellen stets die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen und sind als solche den gewöhnlichen Logarithmen-

tafeln beigegeben. Mittels dieser Tabellen kann man 1. den Logarithmus jeder Funktion eines spitzen Winkels finden und 2. aus dem gegebenen Wert einer Funktion, beziehungsweise aus dessen Logarithmus, den zugehörigen Winkel finden. Eine Anleitung hiezu findet sich stets als Einleitung zu den Logarithmentafeln, kann demnach hier umgangen werden.

An folgenden Beispielen prüfe man, ob man die angegebenen Werte aus der Tafel zu finden im stande ist, wobei bemerkt sein mag, daß die 5. Dezimalstelle wegen der verschiedenartigen Einrichtung der Tafeln einen um ein kleines anderen Wert haben kann.

$\log \sin\ 13^0\,11'\,40'' = 9{,}35842 - 10$
$\log \sin\ 63^0\,43'\,20'' = 9{,}95263 - 10$
$\log \cos\ 28^0\,32'\,20'' = 9{,}94374 - 10$ (cos nimmt ab!)
$\log \cos\ 87^0\,5'\,10'' = 8{,}70616 - 10$ " " "
$\log \mathrm{tang}\ 18^0\,16'\,50'' = 9{,}51896 - 10$
$\log \mathrm{tang}\ 70^0\,48'\,20'' = 0{,}45826$
oder $= 10{,}45826 - 10$
$\log \mathrm{cotg}\ 40^0\,32'\,30'' = 0{,}06786$ (cotg α nimmt ab!)
$\log \mathrm{cotg}\ 85^0\,1'\,20'' = 8{,}94001 - 10.$

Die Funktion eines Winkels von mehr als 90^0 wird nach 8 auf eine Funktion eines spitzen Winkels zurückgeführt; hat die Funktion einen negativen Wert, so bezeichnet man dadurch ein dem Logarithmus angefügtes (n).

$\log \sin\ 112^0\,16'\,30''$ $(= \log \cos\ 22^0\,16'\,30'')$
$(= \log \sin\ 67^0\,43'\,30'') = 9{,}96632 - 10$
$\log \cos\ 127^0\,40'\,20'' = 9{,}78614 - 10$ (n)
$\log \mathrm{tang}\ 153^0\,42'\,10'' = 9{,}69388 - 10$ (n)
$\log \mathrm{cotg}\ 162^0\,23'\,50'' = 0{,}49857$ (n)
$\log \sin\ 253^0\,12'\,40'' = 9{,}98108 - 10$ (n)
$\log \cos\ 184^0\,17'\,20'' = 9{,}99878 - 10$ (n)
$\log \mathrm{tang}\ 212^0\,59'\,50'' = 9{,}81247 - 10$
$\log \mathrm{cotg}\ 229^0\,4'\,10'' = 9{,}93810 - 10$
$\log \sin\ 344^0\,53'\,50'' = 9{,}41589 - 10$ (n)
$\log \cos\ 300^0\,2'\,10'' = 9{,}69944 - 10$

$$\log \operatorname{tang} 292^\circ\, 43'\, 20'' = 0{,}37803 \quad (n)$$
$$\log \operatorname{cotg} 281^\circ\, 12'\, 10'' = 9{,}29679 - 10\,(n)$$

Soll aus dem Wert der Funktion der zugehörige Winkel berechnet werden, so hat derselbe unendlich viele Werte, von denen zwei in den ersten vier Quadranten liegen und alle übrigen aus ihnen durch Addition von $\pm n \,.\, 360^\circ$ gefunden werden.

$\log \sin x = 9{,}28790 - 10$; $x = 11^\circ\, 11'\, 20''$, $x' = 180 - x$
$\log \sin x = 9{,}97761 - 10$; $x = 71^\circ\, 45'\, 30''$, $x' = 180 - x$
$\log \cos x = 9{,}96124 - 10$; $x = 23^\circ\, 50'\, 50''$, $x' = 360 - x$
$\log \cos x = 9{,}73154 - 10$; $x = 57^\circ\, 23'\, 20''$, $x' = 360 - x$
$\log \operatorname{tang} x = 9{,}51670 - 10$; $x = 18^\circ\, 11'\, 30''$, $x' = 180 + x$
$\log \operatorname{tang} x = 0{,}34645$; $x = 65^\circ\, 45'\, 20''$, $x' = 180 + x$
$\log \operatorname{cotg} x = 0{,}34724$; $x = 24^\circ\, 12'\, 20''$, $x' = 180 + x$
$\log \operatorname{cotg} x = 9{,}73707 - 10$; $x = 61^\circ\, 22'\, 20''$, $x' = 180 + x$

$$\log \sin x = 9{,}84885 - 10\,(n);\ x = 180^\circ + 44^\circ\, 55',$$
$$x' = 360^\circ - 44^\circ\, 55'.$$
$$\log \cos x = 9{,}84351 - 10\,(n);\ x = 180^\circ - 45^\circ\, 46'\, 40'',$$
$$x' = 180^\circ + 45^\circ\, 46'\, 40''.$$
$$\log \operatorname{tang} x = 0{,}01230\,(n);\ x = 180^\circ - 45^\circ\, 48'\, 40'',$$
$$x' = 360^\circ - 45^\circ\, 48'\, 40''.$$
$$\log \operatorname{cotg} x = 9{,}82749 - 10\,(n);\ x = 180^\circ - 56^\circ\, 5'\, 30'',$$
$$x' = 360^\circ - 56^\circ\, 5'\, 30''.$$

Aufgabe. Bestimme x aus folgenden Funktionswerten:

$$\sin x = \sqrt{2} - 1;\quad \sin x = 2 - \sqrt{3};$$
$$\cos x = \sqrt{2} - 2;\quad \cos x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 2);$$
$$\operatorname{tang} x = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2};\quad \operatorname{tang} x = \frac{1}{3}\sqrt{3} - 2;$$
$$\operatorname{cotg} x = \pm\sqrt{4 - \frac{1}{2}\sqrt{3}};\quad \operatorname{cotg} x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}\sqrt{3}}.$$

Ein Winkel (Bogen), dessen Sinus $= a$, wird auch mit $\operatorname{arc} \sin a$ bezeichnet; wenn also $\sin x = a$, so ist $x = \operatorname{arc} \sin a$, und ähnliche Bezeichnungen gelten für die Umkehrungen der andern Funktionen. Es ist also

$\operatorname{arc} \sin 1 = 90^\circ$ $(= 90^\circ + 360,\ = 90^\circ + 2 \,.\, 360$, u. s. w.)
$\operatorname{arc} \cos {}^1\!/_2 = 60^\circ, = 300^\circ$ $(= 60^\circ + 360^\circ,\ = 300^\circ + 360^\circ$, u. s. w.)
$\operatorname{arc} \operatorname{tang} 1 = 45^\circ,\ = 225^\circ$, u. s. w.
$\operatorname{arc} \operatorname{cotg} \pm\sqrt{3} = 30^\circ,\ = 150^\circ,\ = 210^\circ,\ = 330^\circ$, u. s. w.

Man hätte demnach die vorhergehenden Aufgaben auch in der Form geben können:

Bestimme arc sin $(\sqrt{2} - 1)$, arc cos $(\sqrt{2} - 2)$ u. s. w.

II. Aufgaben.

Trigonometrische Gleichungen.

Eine trigonometrische Gleichung ist eine solche, bei welcher die Unbekannte als Argument trigonometrischer Funktionen vorkommt. Als Regeln zur Auflösung lassen sich folgende aufstellen.

1. Kommt die Unbekannte nur als Argument einer Funktion vor, so betrachtet man diese Funktion als Unbekannte, bestimmt aus der Gleichung ihren Wert (ihre Werte), indem man die Gleichung für diese Funktion als Unbekannte auflöst und sucht dann die zu den gefundenen Werten der Funktion gehörigen Werte der Unbekannten. Man berücksichtigt dabei, daß der Winkel, auch wenn man sich auf die vier ersten Quadranten beschränkt, doppeldeutig ist, und controlliert, ob alle gefundenen Werte wirklich der gegebenen Gleichung genügen, denn durch manche zur Auflösung der Gleichung notwendigen Operationen (z. B. Quadrieren, um eine Wurzel wegzuschaffen) kann die Gleichung einen größeren Umfang bekommen haben (mehr Wurzeln enthalten), als die gegebene Gleichung (bei welcher etwa eine Quadratwurzel ein vorgeschriebenes Vorzeichen hatte. (Beispiel 3, 4, u. a. m.)

2. Kommt die Unbekannte als Argument mehrerer verschiedener Funktionen vor, so drücke man die verschiedenen Funktionen mittels **3** durch eine Funktion aus und verfahre wie in 1. (Beispiel: 2, 5, 6 u. a. m.)

3. Kommt die Unbekannte als zusammengesetztes Argument $(a + x)$ oder als Vielfaches $(2x, \frac{1}{2}x$ rc.) vor, so verwandelt man diese Funktionen zuerst in solche, welche die Unbekannte als einfaches Argument enthalten (nach **4**, **5** und **6**) oder in solche, welche alle dasselbe Argument enthalten, und verfährt dann nach 2 und 1. (Beispiel: 11, 13, 14, 24 u. a. m.)

4. In manchen Fällen führen Umformungen nach **9** zu leichterer Lösung. (Beispiel: 8 u. a. m.)

5) Gleichungen mit mehreren Unbekannten formt man so um, daß jede Unbekannte nur als Argument je einer Funktion vorkommt, löst die Gleichungen nach diesen Funktionen als Unbekannten auf und verfährt wie in 1.

1. $1 - 1^1/_2 \sin x = {}^1/_4$. 2. $\cos x = {}^3/_4 \sin^2 x$.

3. $\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x} = \frac{2}{\sin x}$. 4. $\cos^2 x + \cos x = 1$.

5. $\cos x - \sqrt{1 + \cos^2 x} = 2 \sin x$. 6. $\cos^2 x = {}^3/_2 \sin x$.

7. $\cos^2 x + \cos x = 5 - 3\sqrt{3}$.

8. $\sin x + \cos x = {}^4/_5;\ = {}^1/_2 \sqrt{3}$.

9. $\cos x \,.\, \sqrt{2} = \sqrt{2} - \sin x$.

10. $\frac{\sin x + 2 \cos x}{4 \sin x - \cos x} = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}}$.

11. $b \sin(\alpha + x) = a \sin(\beta + x)$.

12. $(a + b) \cos(\alpha + x) = (a - b) \cos(\alpha - x)$.

13. $\sin^2 x + 2 \sin 2x = 3 \cos^2 x$.

14. $\cos^2 x + 3 \cos 2x = \sin^2 x$.

15. $\cos x = 3 \sin(45^0 - x)$. 16. $\sin x = 3 \cos(30^0 - x)$.

17. $2 \cos^2 x - \sin^2 x = {}^1/_{12} \sin 2x$.

18. $\cos x + \cos {}^1/_2 x = 1$.

19. $6 \sin^2 x + 8 \cos^2 x = 7 \sin 2x$.

20. ${}^1/_2 \sin 2x - {}^1/_4 \operatorname{tang} x = {}^5/_{12} \sin x$.

21. $\operatorname{tang} x - \sin x = 1 - \cos x$. 22. $\cos x + \sin^2 x = \operatorname{cotg} x$.

23. $\cos x = {}^1/_2 \sin x \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}}$.

24. $\frac{\operatorname{tang} 2x}{\operatorname{tang} x} - \frac{\operatorname{tang} x}{\operatorname{tang} 2x} = 2$.

25. $\operatorname{cotg} 2x \,.\, \operatorname{tang} x + 6 \operatorname{cotg} x \operatorname{tang} 2x + 5^1/_2 = 0$.

26. $\sin(a + x) \sin x = {}^1/_2 \cos(a - x) \cos x$.

27. $a(\cos x + \sin x)^2 = b \cos 2x$

28. $\operatorname{tang} x + \operatorname{cotg} x = \frac{4}{\sqrt{3}}$. 29. $\sin 2x \cos x + \sin x = 1$.

30. $\sin x = a \sin y,\ \operatorname{tang} x = b \operatorname{tang} y$.

31. $a \sin^2 x + b \cos^2 y = b;\ a \cos^2 x - b \sin^2 y = -\frac{1}{a}$.

32. $\sin^2 x + \cos^2 y = {}^3/_2$, $\cos^2 x - \sin^2 y = {}^1/_2$.

33. $9 \operatorname{tang} x + \operatorname{tang} y = 4$, $2 \operatorname{cotg} x + 4 \operatorname{cotg} y = 1$.

Bestimme einen Winkel nach folgenden Angaben:

34. Der Sinus verhält sich zum Cosinus = m : n.

35. Der Cosinus verhält sich zur Tangente = m : n.

36. Der Sinus des einfachen Winkels verhält sich zum Cosinus des doppelten = m : n.

37. Der Sinus des einfachen verhält sich zur Tangente des doppelten = m : n.

38. Der Cosinus des einfachen verhält sich zum Sinus des doppelten = m : n.

39. Der Sinus des einfachen verhält sich zur Tangente des halben = m : n.

40. Der Cosinus des einfachen verhält sich zum Sinus des halben = m : n.

41. Der Sinus ist gleich der Hälfte der Tangente.

42. Der Cosinus ist gleich dem doppelten der Tangente.

43. Die Tangente ist gleich ein Drittel der Cotangente.

44. Der Sinus des einfachen ist die Hälfte des Cosinus des doppelten.

45. Der Cosinus des einfachen ist die Hälfte des Sinus des halben.

46. Die Tangente ist ein Viertel von der Cotangente des doppelten.

47. Der Sinus des einfachen ist ein Viertel vom Cosinus des halben.

48. Die Summen zweier Winkel beträgt 73° 12′, die Tangenten dieser Winkel verhalten sich wie 4 : 3, wie groß sind diese Winkel, wenn sie positiv sein sollen?

49. Wie groß sind zwei positive Winkel, deren Summe 110° 40′ ausmacht, wenn ihre Sinus sich wie 3 : 2 verhalten?

50. Den Winkel von 60° soll man in zwei Teile teilen, so daß der Cosinus des einen Teiles $1^1/_2$ mal so groß ist als der Cosinus des anderen Teiles.

51. Man soll 180° in drei Teile teilen, so daß die Sinus der Teile sich wie 3 : 4 : 5 verhalten.

52. Man soll 180^0 in drei Teile teilen, so daß die Tangenten der Teile sich wie $1:2:3$ verhalten.

53. $\sin x \cos y = \frac{1}{4}\sqrt{6}$, $\sin^2 x - \sin^2 y = \frac{1}{4}$.

54. $\sin x + \frac{1}{2}\cos y = \frac{1}{4}\sqrt{5}$, $\cos^2 x - \sin x \cos y = \frac{3}{4}$.

55. $\tan x \tan y = 1$, $\tan x + \cot y = 2 + 2\sqrt{2}$.

56. $\sin x \cot y = \frac{1}{6}\sqrt{6}$, $\tan^2 y + \sin x \tan y + \cos^2 y = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{6})$.

57. $$\begin{cases} \tan^2 z - \cos^2 x - \sin^2 y = 3\frac{1}{4}, \\ \sin x + \cos y = 1\frac{1}{2}, \\ \frac{\tan z}{\cos y} = 4. \end{cases}$$

58. $$\begin{cases} \tan^2 y + \cos^2 x - \cos^2 z = \frac{1}{4}. \\ \sin x + \sin z = 1\frac{1}{2}. \\ \frac{\tan y}{\sin z} = 2. \end{cases}$$

Anhang. Es ist $\sin 3x = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x$.

$\cos 3x = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x$.

Durch weitere ähnliche Ableitung findet man

$\sin 4x = 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x$.

$\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x$.

$\sin 5x = 5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x$.

$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x$.

$\sin 6x = 6\cos^5 x \sin x - 20\cos^3 x \sin^3 x + 6\cos x \sin^5 x$.

$\cos 6x = \cos^6 x - 15\cos^4 x \sin^2 x + 15\cos^2 x \sin^4 x - \sin^6 x$.

Die hier auftretenden Coefficienten sind die Binomialcoefficienten, welche auch bei der Entwickelung der Potenz eines Binoms entstehen. Und da bei der Entwickelung der folgenden Formeln (etwa $\sin 7x$ und $\cos 7x$) stets je zwei benachbarte Coefficienten der vorhergehenden addiert werden, z. B. $6 + 15$, $20 + 5$ bei $\cos 7x$ und $1 + 6$, $15 + 20$.... bei $\sin 7x$, die Summe zweier aufeinanderfolgenden Binomialcoefficienten aber stets wieder einen Binomialcoefficienten der nächsthöheren Potenz gibt, so folgt, daß dasselbe Entwickelungsgesetz auch für die sin und cos der folgenden Vielfachen von x gilt, z. B.

$$\sin 7x = 7\cos^6 x \sin x - 35\cos^4 x \sin^3 x + 21\cos^2 x \sin^5 x - \sin^7 x$$

$$\cos 7x = \cos^7 x - 21\cos^5 x \sin^2 x + 35\cos^3 x \sin^4 x - 7\cos x \sin^6 x$$

allgemein

$$\sin nx = \binom{n}{1}\cos^{n-1} x \sin x - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\sin^3 x + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\sin^5 x - \ldots\ldots$$

$$\cos nx = \cos^n x - \binom{n}{2}\cos^{n-2} x \sin^2 x + \binom{n}{4}\cos^{n-4} x \sin^4 x - + \ldots.$$

Multipliciert man die erste Gleichung mit $i = \sqrt{-1}$ und addiert sie zur zweiten, so kann man die rechte Seite auch in der Form schreiben

$$\cos nx + i\sin nx = \cos^n x + i\binom{n}{1}\cos^{n-1}\sin x + i^2\binom{n}{2}\cos^{n-2}\sin^2 x + i^3\binom{n}{3}\cos^{n-3}\sin^3 x + i^4\binom{n}{4}\cos^{n-4} x \sin^4 x + \ldots\ldots$$

Die rechte Seite hat nun die Form der Entwickelung von $(\cos x + i\sin x)^n$, also hat man

$$\cos nx + i\sin nx = (\cos x + i\sin x)^n.$$

Wenn man also rechts die Potenz nach dem Binomialsatz entwickelt und einerseits die reellen Glieder vereinigt, anderseits die imaginären, so ist $\cos nx$ gleich dem reellen Teile, $\sin nx$ gleich dem imaginären Teile dieser Entwickelung.

II. Abschnitt.

Ebene Trigonometrie.

12.

Berechnung rechtwinkliger Dreiecke.

Da im rechtwinkligen Dreieck ein Winkel 90^0 hat, so genügt zur Bestimmung des Dreiecks die Angabe von zwei Bestimmungsstücken, nämlich entweder von zwei Seiten oder von einer Seite und einem spitzen Winkel. Zur Berechnung der noch fehlenden Seiten und Winkel genügt die einfache Anwendung der trigonometrischen Funktionen und des pythagoräischen Lehrsatzes.

Bezeichnet man die spitzen Winkel des Dreieckes mit α und β, wobei $\alpha + \beta = 90^0$, die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten mit a und b, und die Hypotenuse mit c, so ergeben sich folgende einzelne Fälle:

1. Gegeben a und α, gesucht β, b, c.

Es ist $\beta = 90^0 - \alpha$. $\frac{b}{a} = \operatorname{cotg} \alpha$; $b = a \cot \alpha$.

$$\frac{a}{c} = \sin \alpha, \; c = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

2. Gegeben b und α; gesucht β, a, c.

Es ist $\beta = 90^0 - \alpha$; $\frac{a}{b} = \operatorname{tang} \alpha$; $a = b \operatorname{tang} \alpha$.

$$\frac{b}{c} = \cos \alpha, \; c = \frac{b}{\cos \alpha}.$$

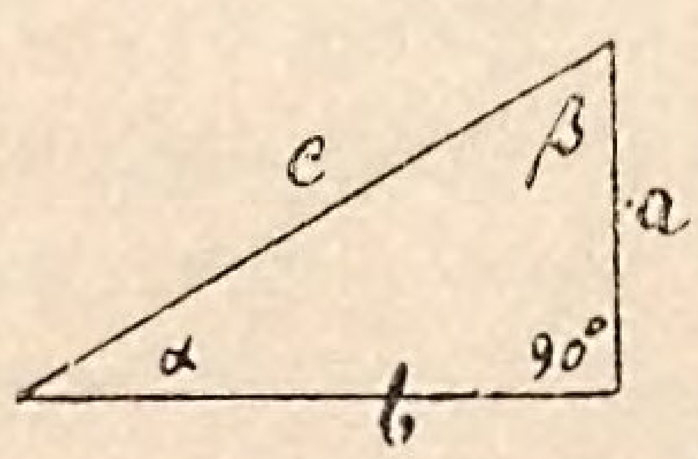


Fig. 67.

3. Gegeben c und α; gesucht β, a, b.

Es ist $\beta = 90^0 - \alpha$; $\frac{a}{c} = \sin \alpha$,

$$a = c \sin \alpha; \; \frac{b}{c} = \cos \alpha, \; b = c \cos \alpha.$$

4. Gegeben a und c; gesucht α, β, b.

Es ist: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\beta = \frac{a}{c}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ $= \sqrt{(c+a)(c-a)}$.

5. Gegeben a und b; gesucht α, β, c.

Es ist $\operatorname{tang}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{tang}\beta = \frac{b}{a}$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; oder, nachdem α oder β berechnet worden ist, ist $c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$.

Aufgaben: Aus folgenden Zusammenstellungen wähle man je zwei Bestimmungsstücke als gegeben, und berechne die fehlenden:

1. $a = 127{,}49$, $b = 48{,}273$, $c = 136{,}32$, $\alpha = 69^0\,15'\,41''$, $\beta = 20^0\,44'\,19''$.
2. $a = 59{,}7$, $b = 63{,}723$, $c = 87{,}32$, $\alpha = 43^0\,8'$, $\beta = \ldots.$
3. $a = 0{,}09413$, $b = 0{,}55806$, $c = 0{,}56594$, $\alpha = 9^0\,34{,}27''$, $\beta = \ldots.$
4. $a = 4272{,}8$, $b = 8058{,}5$, $c = 9121{,}2$, $\alpha = 27^0\,56'\,1''$.
5. $a = 8{,}726$, $b = 5{,}9029$, $c = 10{,}535$, $\alpha = 55^0\,55'\,21''$.

Gleichschenkelige Dreiecke und reguläre Vielecke lassen sich durch Zerlegung in rechtwinkelige Dreiecke berechnen und dieselbe Methode führt auch noch bei vielen andern Aufgaben zum Ziel.

III. Aufgaben.

1. Wie hoch ist ein Turm, wenn man in einer horizontalen Entfernung von 73,6 m die Spitze unter einem Elevationswinkel von $32^0\,4'$ sieht?

2. Welche Schattenlänge wirft ein Stab von 7,2 m Höhe bei einer Sonnenhöhe von $47^0\,12'$?

3. Umgekehrt soll man aus der Sonnenhöhe von $42^0\,36'$ und der Schattenlänge 12,73 m die Höhe des Gegenstandes, oder aus der Höhe 6,37 m des Gegenstandes und seiner Schattenlänge von 3,94 m die Sonnenhöhe berechnen.

4. In einem rechtwinkeligen Dreieck ist die vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällte Senkrechte 15,4 m lang und teilt die Hypotenuse in Abschnitte, die sich wie 15 : 7 verhalten. Man berechne die fehlenden Stücke des Dreiecks.

5. Durch eben diese (jedoch unbekannte) Senkrechte wird die Hypotenuse in die Abschnitte $m = 5$, $n = 18$ zerlegt, oder

6. Der eine Abschnitt beträgt 12 m, die andere Kathete 23 m. Man berechne die fehlenden Stücke.

7. Wie groß ist im Kreise vom Radius $r = 20{,}74$ cm die Seite und Fläche des eingeschriebenen 5, 7, 9, 18-Eckes?

8. Einem Kreise vom Radius $r = 9{,}13$ dm soll ein 5, 8, 15, 36-Eck umschrieben werden; wie groß ist dessen Radius und Fläche?

9. Umgekehrt sollen aus der Seite $a = 7{,}78$ m des regulären 7, 11, 16, 24-Eckes dessen Fläche und die Radien der ein- und umschriebenen Kreise berechnet werden.

10. Aus der Fläche $F = 100$ qm des regulären 8, 10, 13, 21, 40-Eckes soll die Seite sowie der Radius des ein- und umbeschriebenen Kreises berechnet werden.

11. Einem Kreise vom Radius r wird ein 9, 15-Eck ein- und ein ebensolches umbeschrieben: um wie viel ist letzteres größer als das erstere?

12. Man berechne die Fläche des Kreissegmentes aus dem Kreisradius $r = 10{,}42$ cm und dem Centriwinkel $\alpha = 127^0\,14'$.

13. Man berechne die Fläche und den Centriwinkel des Kreissegmentes aus dem Kreisradius $r = 98{,}4$ cm und der Sehne $= 153{,}6$ cm.

14. Man berechne die Fläche des Kreissegmentes aus der Sehne $a = 57{,}39$ cm und dem Centriwinkel $\alpha = 54^0\,12'$.

15. Man berechne die Fläche und den Centriwinkel eines Kreissegmentes aus der Sehne $a = 48{,}27$ cm und dem Abstand der Mitte der Sehne von der Mitte des Bogens $b = 19{,}82$ dm (Apoteme, Pfeil).

16. Man soll ein rechtwinkeliges Dreieck auflösen, d. h. die noch unbekannten Seiten und Winkel desselben berechnen, wenn gegeben sind:

α. Die Hypotenuse $c = 11,37$ cm und die Summe der beiden Katheten $s = 15,28$ cm.

β. Die Hypotenuse $c = 3,79$ m und die Differenz der beiden Katheten $d = 0,94$ m.

γ. Die Kathete $a = 673$ und die Summe von Hypotenuse und anderer Kathete $s = 1194$.

δ. Die Kathete $a = 7,2$ und die Differenz aus der Hypotenuse und anderen Kathete 2,14 m.

ε. Der Umfang $u = 36$ m, und die Fläche $f = 54$ qm.

ζ. Der Winkel $\alpha = 74^0\,18'$ und die Summe (Differenz) der beiden Katheten $s = 28,45$ m.

η. Der Winkel $\alpha = 24^0\,9'$ und die Summe aus anliegender Kathete und Hypotenuse $s = 19,4$ m.

ϑ. Der Winkel $\alpha = 51^0\,19'\,40''$ und die Summe aus gegenüberliegender Kathete und Hypotenuse $s = 34,8$ m.

ι. Wie η und ϑ, doch ist statt der Summe die Differenz von Hypotenuse und angegebener Kathete $d = 1,53$ cm gegeben.

κ. Der Umfang $u = 533$ m und ein Winkel $\alpha = 72^0\,12'$.

λ. Die Fläche $f = 50$ qm und ein Winkel $\alpha = 33^0\,40'$.

μ. Die Kathete $a = 19,2$ dm und der Radius $\rho = 6,4$ dm des einbeschriebenen Kreises.

ν. Radius des einbeschriebenen Kreises, $\rho = 3,07$ cm und ein Winkel $\alpha = 21^0\,5'$.

17. Man berechne den Inhalt eines Kreisabschnittes aus dem Centriwinkel $\alpha = 74^0\,44'$ und der Entfernung der Sehne vom Mittelpunkte $d = 12$ m.

18. Von drei Kreisen, deren Radien 1, 2, 3 m sind, berühren sich je zwei von außen; wie groß ist die zwischen ihnen liegende Fläche?

19. In einem Kreise vom Radius $r = 9,468$ m sind von demselben Punkte der Peripherie aus zwei Sehnen gezogen, deren eine $a = 6,427$ m, deren andere $b = 15,439$ m ist. Wie groß der Winkel und das Flächenstück zwischen den Sehnen? (Man berechne beide Fälle, die nach der Fassung der Aufgabe möglich sind.)

20. In einem Kreise vom Radius r = 14,19 m sind im Abstande a = 4,729 m zwei gleiche und parallele Sehnen gezogen; wie lang sind die Bögen zwischen ihnen?

21. Zwei Riemenscheiben von den Halbmessern R = 0,72 m und r = 0,37 m liegen in derselben Ebene mit einem Mittelpunktsabstand = 1,85 m. Wie groß ist der um sie gelegte Treibriemen, a) wenn die Rollen in derselben Richtung, b) wenn sie in entgegengesetzter Richtung sich bewegen sollen?

22. Drei Riemenscheiben liegen in einer Ebene; ihre Mittelpunkte bilden die Ecken eines gleichschenkeligen Dreieckes, dessen Basis a = 140 cm, Schenkel b = 220 cm. Die an der Basis liegenden Riemenscheiben haben denselben Radius R = 50 cm, die an der Spitze liegende hat den Radius r = 20 cm; wie lang ist der um die drei Rollen gelegte Treibriemen?

23. In einem Trapez ist die eine der parallelen Seiten = 366 m, die beiden anliegenden Winkel sind $112^0\,44'$ und $74^0\,13'$, die Höhe ist 63 m; wie groß ist die Fläche?

24. Man soll ein gleichschenkeliges Dreieck auflösen, von welchen gegeben sind

α) Die Basis a = 19,14 m und der Winkel an der Spitze $\alpha = 153^0\,14'\,28''$. (Inhalt = ?)

β) Der Umfang u = 420 m und der Winkel an der Basis $\alpha = 64^0\,11'$. (Inhalt = ?)

γ) Der Schenkel b = 57,3 cm und die zum Schenkel gehörige Höhe h' = 32,1 cm.

δ) Die Fläche f = 84 qm und der Winkel an der Spitze $\alpha = 103^0\,40'$.

ε) Die Fläche f = 5 qm und der Schenkel b = 4 m.

25. Eine Straße hat 2%, 6%, 10% Steigung; wie groß ist ihr Neigungswinkel?

26. Der Umfang des Erdäquators ist 5400 g. M. Wie groß ist der Grad eines Parallelkreises unter der geographischen Breite $\varphi = 50^0\,12'$.

27. In welcher geographischen Breite beträgt der Grad eines Parallelkreises 100 km, wenn der Halbmesser der Erde 6377,4 km beträgt?

28. Unter welchem Gesichtswinkel sehe ich einen vertikalen Thurm von der Höhe $h = 87$ m, wenn ich 227 m horizontal von demselben entfernt bin und 23 m höher stehe als der Fuß des Thurmes?

29. Die Höhe eines auf einem Berge stehenden Kreuzes beträgt 6,74 m, von einem im Thale liegenden Beobachtungsorte aus messe ich die Elevationswinkel des oberen und unteren Randes $\beta = 23^\circ 17' 8''$, $\alpha = 22^\circ 30' 43''$; wie hoch ist der Berg und wie weit bin ich horizontal vom Kreuze entfernt?

30. Ein Hügel steigt unter $16^\circ 40'$; 400 m vom Fuße des Hügels entfernt soll eine Straße von 6° Neigung angelegt werden; in welcher Höhe trifft sie den Abhang des Hügels und welche Länge hat sie bis dorthin?

31. Von meinem Standpunkte A gehe ich zuerst 580 m unter einem Azimut von $19^\circ 20'$, dann 733 m unter A. v. $87^\circ 33'$, dann 1012 m unter A. v. $116^\circ 13'$ und bin nun in B; wie lang ist AB und wie groß ist der A. v. AB?*)

32. Von meinem Standpunkt A gehe ich zuerst 417 m unter Az. $= 343^\circ 18'$, dann 749 m unter Az. $= 31^\circ 41'$, dann 1433 m unter Az. $= 102^\circ 44'$, dann 206 m unter Az. $= 202^\circ 2'$, und komme so nach B; wie lang ist AB und wie groß ist sein Azimut?

33. Von meinem Standpunkt gehe ich zuerst 733 m unter Az. $= 164^\circ 12'$, dann 1317 m unter Az. $= 198^\circ 40'$, dann 1008 m unter $251^\circ 14'$, dann 412 m unter $329^\circ 8'$ und komme so nach B; wie lang ist AB und welches ist sein Azimut?

34. Mein Winkelinstrument wird stets nach Norden eingestellt und zeigt dann die Winkel nach Osten und Westen bis

*) Unter Azimut einer (horizontalen) Richtung versteht man den Winkel, den diese Richtung mit der (horizontalen) Südrichtung einschließt. Das Azimut wird gewöhnlich von Süden über Westen gezählt bis 360°, so daß z. B. die Richtung nach Südwest 45°, West 90°, N.-W. 135°, N. 180°, N.-O. 215° u. s. w. Oestliches Azimut wird von Süden über Osten gezählt. In dieser und den folgenden Aufgaben projicirt man jede Strecke auf eine feste Linie, etwa die Südrichtung des Ausgangspunktes, berechnet die Projektionen und Projicierenden und setzt aus ihnen die Projektion und die Projicierende der gesuchten Strecke zusammen, dann leicht.

je 180° (Süden); mit ihm gehe ich zuerst 548 m unter östl. Az. 137° 49′, dann 1048 unter 80° 16′ ö. Az., dann 936 m unter 6° 8′ westl. Az, dann 844 m unter 47° 12′ w. Az. und komme so nach B; wie lange ist AB und welches Azimut bildet es?

35. Von einem Sechseck ABCDEF kenne ich Seite AB = 363 m, ∢ B = 108° 13′, BC = 744 m, ∢ C = 147° 40′, CD = 1448 m, ∢ D = 116° 11′, DE = 722 m, ∢ E = 102° 39′, EF = 497 m; wie groß ist die letzte Seite AF und ihr Winkel?

36. Einen vertikalen Thurm sehe ich von meinem Standpunkt aus unter einem Gesichtswinkel α; mein Standpunkt ist a m horizontal vom Thurm entfernt und liegt b m höher als der Fuß des Thurmes; wie hoch ist der Thurm?

$\alpha = 29^\circ 49' 10''$ a = 235 m b = 19,4 m...

37. In einer senkrechten quadratischen Pyramide ist die Grundkante = a (= 87,42 cm) die Höhe = $1\frac{1}{2}$ a (= 69,42 cm) wie groß ist 1) die Neigung der Seitenfläche gegen die Grundfläche, 2) die Neigung der Seitenkante gegen die Grundfläche, 3) die Neigung der Seitenkante gegen die Grundkante.

38. In einer regulären dreiseitigen Pyramide ist die Grundkante = a (= 1,072 m) die Seitenkante = $\frac{3}{4}$ a (1,278 m); man bestimme dieselben Winkel.

39. Von einer senkrechten Pyramide mit rechteckiger Basis kennt man die Grundkanten = 12,49 dm und 8,72 dm, sowie die Seitenkante = 14,81 dm; welche Winkel bilden die Seitenkanten mit den Grundkanten und die Seitenflächen mit der Grundfläche. Wie groß ist der Inhalt der Pyramide?

13.

Berechnung schiefwinkeliger Dreiecke.

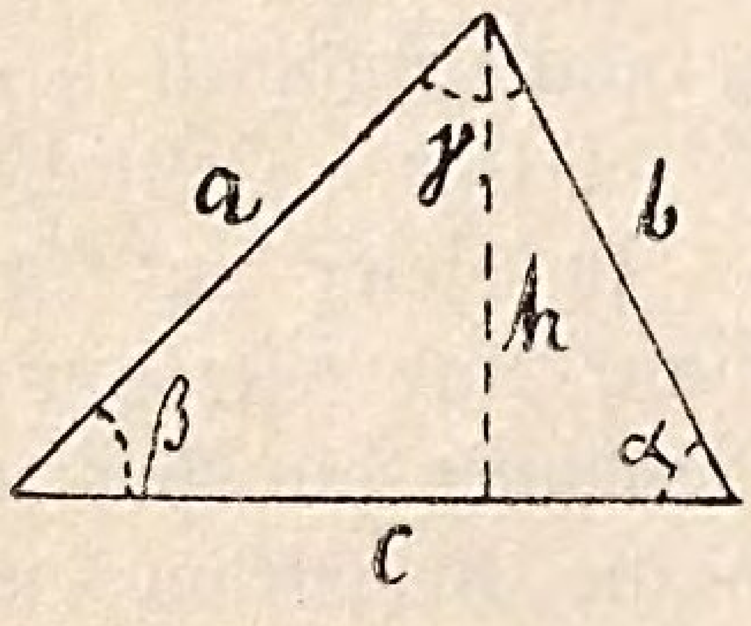


Fig. 18.

Zur Berechnung schiefwinkeliger Dreiecke sind folgende Sätze dienlich, bei deren Formulierung die übliche Bezeichnung beibehalten wird, daß die Seiten mit a, b, c die gegenüberliegenden Winkel mit α, β, γ bezeichnet werden ($\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$).

Sinussatz. Die Seiten eines Dreieckes verhalten sich wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

Beweis. Zieht man die zur Seite c gehörige Höhe h so hat man $\frac{h}{a} = \sin\beta$, $h = a\sin\beta$, und $\frac{h}{b} = \sin\alpha, h = b\sin\alpha$, durch Vergleichung $a \sin\beta = b \sin\alpha$, also $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$. Man zieht eine andere Höhe, verfährt ebenso und vervollständigt dadurch den Beweis.

Der Satz dient 1) dazu, um aus einer Seite und zwei Winkeln, durch welche auch der 3. Winkel bestimmt ist, die fehlenden Seiten zu berechnen.

Der Satz dient 2. dazu, um aus zwei Seiten und dem einer Seite gegenüberliegenden Winkel (a, b, α) den der andern Seite gegenüberliegenden Winkel (β) zu berechnen. Da dann auch der dritte Winkel (γ) bekannt ist, so kann nach 1 auch die dritte Seite (c) berechnet werden. Wird hiebei $\sphericalangle\,\beta$ aus a, b, α berechnet, so ergibt er sich aus $\sin\beta = \frac{b \,.\, \sin\alpha}{a}$; es gehören aber zu einem sin stets zwei Winkel, welche im vorliegenden Falle, da $\sin\beta$ sich stets als positiv darstellt, im 1. und 2. Quadranten liegen, und als x und $180^0 + x$ erscheinen. Ist nun $b < a$, so muß auch $\beta < \alpha$ sein, also kann β nicht stumpf sein und es hat blos der im 1. Quadranten liegende Wert von β eine geometrische Bedeutung. Ist aber $b > a$, also $\beta > \alpha$, so kann β auch stumpf sein und es sind dann stets beide Werte von β zulässig; in diesem Falle ist die Aufgabe zweideutig und die Lösung liefert die zwei Dreiecke AB_1C mit dem spitzen Winkel β_1 und AB_2C

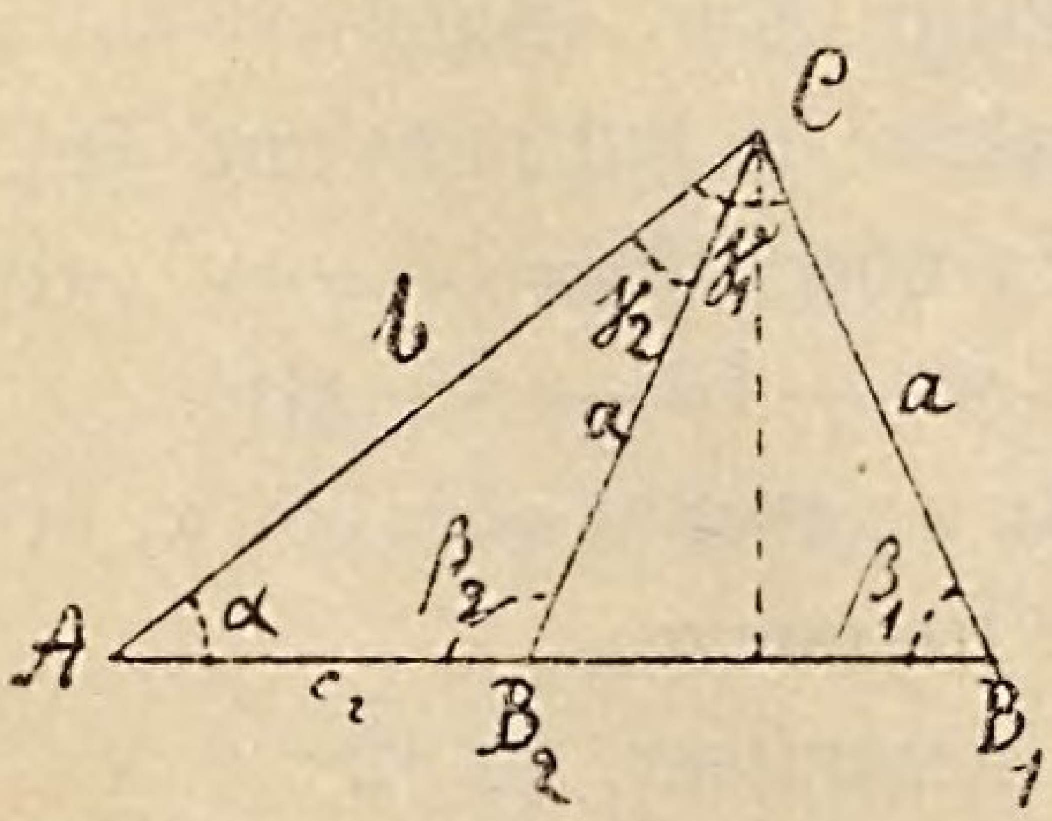


Fig. 19.

mit dem stumpfen Winkel $\beta_2 = 180 - \beta_1$. Auch bei darauffolgenden Berechnungen etwa von c, oder von der Fläche des Dreieckes ist auf die beiden Werte von β Rücksicht zu nehmen; es gibt zwei Werte von c, nämlich $c_1 = AB_1$ und $c_2 = AB_2$.

Aufgaben. Aus folgender Zusammenstellung wähle man eine Seite und zwei Winkel und bestimme daraus die anderen.

1. $\begin{cases} a = 37{,}642, & b = 44{,}612, & c = 38{,}410 \\ \alpha = 53^\circ 17' 20'', & \beta = 71^\circ 49' 30'', & \gamma = 54^\circ 53' 10''. \end{cases}$

2. $\begin{cases} a = 4732{,}5, & b = 2266{,}5, & c = 3116{,}9 \\ \alpha = 122^\circ 16' 30'', & \beta = 23^\circ 53' 10'', & \gamma = 33^\circ 50' 20''. \end{cases}$

3. $\begin{cases} a = 3{,}1485, & b = 1{,}072, & c = 3{,}2646 \\ \alpha = 74^\circ 18' & \beta = 19^\circ 8' & \gamma = 86^\circ 34'. \end{cases}$

4. Aus $a = 87{,}24$, $b = 54{,}28$, $\alpha = 64^\circ 11'$ berechne
$\beta = 34^\circ 3' 40''$, $\gamma = 81^\circ 45' 20''$, $c = 95{,}91$.

5. Aus $a = 171{,}2$, $b = 335{,}4$, $\alpha = 27^\circ 8' 30''$ berechne
$\beta_1 = 63^\circ 20' 50''$, $\gamma_1 = 89^\circ 30' 40''$, $c_1 = 375{,}27$
$\beta_2 = 116^\circ 39' 10''$, $\gamma_2 = 36^\circ 12' 20''$, $c_2 = 221{,}67$.

6. Aus $a = 3{,}954$, $c = 3{,}542$, $\gamma = 61^\circ 18' 40''$ berechne
$\alpha_1 = 78^\circ 19' -''$, $\beta_1 = 40^\circ 22' 20''$, $b_1 = 2{,}615$
$\alpha_2 = 101^\circ 41' -''$, $\beta_2 = 17^\circ 0' 20''$, $b_2 = 1{,}181$.

14.

Cosinus-Satz.

In jedem Dreieck ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten vermindert um das doppelte Produkt dieser Seiten mal dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos \alpha.$$

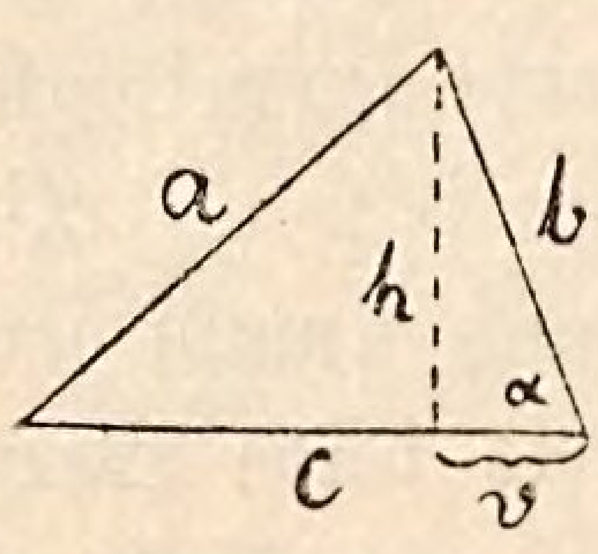


Fig. 20.

Beweis. Liegt die Seite a einem spitzen Winkel gegenüber, so hat man aus Fig.:

$a^2 = (c - v)^2 + h^2$; aber $h^2 = b^2 - v^2$, also
$a^2 = c^2 - 2cv + v^2 + b^2 - v^2$, also
$a^2 = b^2 + c^2 - 2cv$; aber $v = b \cos \alpha$, also
$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos \alpha$.

Liegt a einem stumpfen Winkel gegenüber, so ist:

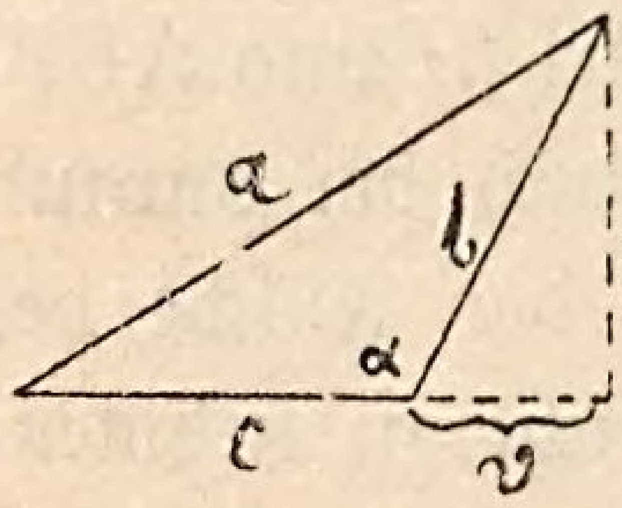


Fig. 21.

$a^2 = (c + v)^2 + h^2$; aber $h^2 = b^2 - v^2$, also
$a^2 = c^2 + 2cv + v + b^2 + v^2$
$a^2 = b^2 + c^2 + 2cv$; aber $v = b \cos (180 - \alpha)$
$= - b \cos \alpha$, also
$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos \alpha$.

Man hat also in jedem Falle dieselbe Formel; ist α stumpf, so ändert $\cos\alpha$, da er negativ ist, das Zeichen des letzten Gliedes und macht es entsprechend dem bekannten Lehrsatz der Geometrie.

Ebenso hat man für die anderen Seiten:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos\beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma.$$

Der Satz dient dazu, um

1. aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die dritte Seite zu finden;

2. aus den drei Seiten die Winkel zu finden, denn es ist $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ entsprechend, und zwar ist der Winkel spitz oder stumpf, je nachdem sich der Wert seines cosinus als positiv oder negativ ergibt.

Der Cosinussatz in Verbindung mit dem Sinussatz genügt also, um Dreiecke zu berechnen, wenn die in den vier Congruenzsätzen aufgestellten Bestimmungsmerkmale gegeben sind. Jedoch wird der Cosinussatz in dieser Form selten angewandt, weil die Formeln für logarithmische Berechnung nicht bequem sind. Gleichwohl versuche man, nach Auswahl beliebiger Stücke aus folgender Zusammenstellung die fehlenden Stücke zu berechnen.

1.	$a = 19{,}427$,	$b = 31{,}406$,	$c = 28{,}983$
	$\alpha = 37^0\,15'\,30''$,	$\beta = 78^0\,9'\,26''$,	$\gamma = 64^0\,35'\,4''$
2.	$a = 8597{,}3$	$b = 12645$,	$c = 10002$
	$\alpha = 42^0\,39'\,29''$,	$\beta = 85^0\,18'\,38''$,	$\gamma = 52^0\,1'\,53''$
3.	$a = 227{,}41$,	$b = 141{,}52$	$c = 104{,}29$
	$\alpha = 134^0\,50'\,12''$,	$\beta = 26^0\,11'\,10''$	$\gamma = 18^0\,58'\,38''$
4.	$a = 4{,}8275$	$b = 5{,}4621$,	$c = 1{,}9294$
	$\alpha = 60^0\,53'\,40''$,	$\beta = 98^0\,40'$,	$\gamma = 20^0\,26'\,20''$

Der Versuch, in der Formel $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha$ etwa b oder c als Unbekannte anzusehen, führt durch Auflösung der quadratischen Gleichung zu unschönen Formeln, die um so mehr entbehrlich sind, als die Anwendung des Sinussatzes das Dreieck auf bequemere Weise auflöst.

15.

Tangentensatz.

In jedem Dreieck verhält sich die Summe zweier Seiten zu ihrer Differenz wie die Tangente der halben Summe der gegenüberliegenden Winkel zur Tangente der halben Differenz derselben Winkel.

$$(a + b) : (a - b) = \tang {}^1/_2 (\alpha + \beta) : \tang {}^1/_2 (\alpha - \beta).$$

Beweis: Es ist $a : b = \sin \alpha : \sin \beta$; hieraus folgt:

$$(a + b) : (a - b) = (\sin \alpha + \sin \beta) : (\sin \alpha - \sin \beta) \ldots.$$

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{2 \sin {}^1/_2 (\alpha + \beta) \cos {}^1/_2 (\alpha - \beta)}{2 \cos {}^1/_2 (\alpha + \beta) \sin {}^1/_2 (\alpha - \beta)} = \frac{\tang {}^1/_2 (\alpha + \beta)}{\tang {}^1/_2 (\alpha - \beta)}.$$

Dieser Satz dient dazu, um aus zwei Seiten (a, b) und dem eingeschlossenen Winkel (γ) die anderen Winkel α und β zu bestimmen. Denn wenn γ bekannt, so ist auch $\alpha + \beta = 180^0 - \gamma$ bekannt; man berechnet also mittels des Tangentensatzes die Größe von ${}^1/_2 (\alpha - \beta)$, welches dann mit ${}^1/_2 (\alpha + \beta)$ sowohl α als β liefert. Die fehlende Seite c berechnet man dann mittels des Sinussatzes.

Aus den Zusammenstellungen von 13 und 14 wähle man passende Stücke und berechne die fehlenden.

16.

Sätze der halben Winkel.

Aus 14 ist $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 b c}$; setzt man dies in

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \text{ und } \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \text{ so ist:}$$

$$\cos {}^1/_2 \alpha = \sqrt{\frac{1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 b c}}{2}} = \sqrt{\frac{2 b c + b^2 + c^2 - a^2}{4 b c}}$$

$$= \sqrt{\frac{(b + c)^2 - a^2}{4 b c}} = \sqrt{\frac{(b + c + a)(b + c - a)}{4 b c}}; \text{ ebenso}$$

$$\cos {}^1/_2 \beta = \sqrt{\frac{(a + c + b)(a + c - b)}{4 a c}};$$

$$\cos {}^1/_2\,\gamma = \sqrt{\frac{(a+b+c)\ (a+b-c)}{4ab}};$$

$$\sin {}^1/_2\,\alpha = \sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}};\ \text{ebenso}$$

$$\sin {}^1/_2\,\beta = \sqrt{\frac{(b+a-c)\ (b-a+c)}{4ac}};$$

$$\sin {}^1/_2\,\gamma = \sqrt{\frac{(c+a-b)\ (c-a+b)}{4ab}}.$$

Setzt man $s = {}^1/_2\,(a+b+c)$, also $a+b+c = 2s$, so ist: $a+b-c = 2\,(s-c)$, $a-b+c = 2\,(s-b)$, $-a+b+c = 2\,(s-a)$; und es ist:

$$\cos {}^1/_2\,\alpha = \sqrt{\frac{s\,.\,(s-a)}{bc}};\ \sin {}^1/_2\,\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\ \text{hieraus}$$

$$\operatorname{tang} {}^1/_2\,\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)\ (s-c)}{s\ (s-a)}};\ \operatorname{cotg} {}^1/_2\,\alpha = \sqrt{\frac{s\,(s-a)}{(s-b)\ (s-c)}}.$$

Mittels dieser Formeln können aus 3 Seiten die Winkel berechnet werden und ergeben sich stets unzweideutig.

Beispiele aus 13 und 14.

17.

Außer diesen Sätzen können noch folgende angewandt werden.

Der Mollweide'sche Satz.

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos {}^1/_2\,(\alpha-\beta)}{\cos {}^1/_2\,(\alpha+\beta)},\quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin {}^1/_2\,(\alpha-\beta)}{\sin {}^1/_2\,(\alpha+\beta)}.$$

Beweis: Es ist $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$; hieraus

$(a \pm b) : b = (\sin\alpha \pm \sin\beta) : \sin\beta$; aber

$b \quad : c = \quad \sin\beta \quad : \sin\gamma$, und $\gamma = 180 - (\alpha+\beta)$ also

mult. $(a \pm b) : c = (\sin\alpha \pm \sin\beta) : \sin(\alpha+\beta)$; hieraus:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{2\sin {}^1/_2\,(\alpha+\beta)\cos {}^1/_2\,(\alpha-\beta)}{2\sin {}^1/_2\,(\alpha+\beta)\cos {}^1/_2\,(\alpha+\beta)};\quad \frac{a+b}{c} = \frac{\cos {}^1/_2\,(\alpha-\beta)}{\cos {}^1/_2\,(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{2\cos {}^1/_2\,(\alpha+\beta)\sin {}^1/_2\,(\alpha-\beta)}{2\sin {}^1/_2\,(\alpha+\beta)\cos {}^1/_2\,(\alpha+\beta)};\quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin {}^1/_2\,(\alpha-\beta)}{\sin {}^1/_2\,(\alpha+\beta)}.$$

Anwendung: Hat man aus a, b, γ mittels des Tangentensatzes $^1/_2(\alpha - \beta)$ bestimmt, so liefert diese Formel die 3. Seite c etwas rascher als der Sinussatz.

Da jede Seite gleich ist der Summe der Projektionen der beiden anderen Seiten auf sie, so ist:

$$a = b \cos\gamma + c \cos\beta.$$

Dies gilt auch, wenn ein Winkel stumpf ist, da dann sein cos negativ ist.

18.

Fläche der Dreiecke.

Die Fläche f der Dreiecke soll bestimmt werden.

1. Sind gegeben zwei Seiten (a, b) und der eingeschlossene Winkel, so ist

$$f = {^1/_2}\, a\, b \sin\gamma;$$

denn a ist Grundlinie, $b \sin\gamma$ ist die zugehörige Höhe.

2. Sind gegeben eine Seite a und zwei anliegende Winkel (β, γ), so ist

$$f = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin(\beta + \gamma)}.$$

Dies folgt aus 1) wenn man b nach dem Sinussatz durch $\frac{a \sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{a \sin\beta}{\sin(\beta + \gamma)}$ ersetzt.

3. Sind gegeben eine Seite a, ein anliegender und ein gegenüberliegender Winkel (β, α) so ist

$$f = \frac{a^2 \sin\beta \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin\alpha},$$

indem man in 2) $\sin(\beta + \gamma)$ durch $\sin\alpha$, und $\sin\gamma$ durch $\sin(\alpha + \beta)$ ersetzt.

4. Sind gegeben drei Seiten, so ist

$$f = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)};$$

denn $f = {^1/_2}\, ab \sin\gamma = ab \sin {^1/_2}\gamma \cos {^1/_2}\gamma$; ersetzt man $\sin {^1/_2}\gamma$ und $\cos {^1/_2}\gamma$ durch ihre Werte in 16, so folgt die Formel.

5. Sind gegeben zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel, so wird zuerst der andere gegenüberliegende Winkel berechnet, dann 1. angewandt, und dabei die mögliche Doppeldeutigkeit berücksichtigt.

Berechnet man die Flächen der in 13 und 14 angegebenen Dreiecke, so findet man:

13) 1. 686,84; 2. 2986500; 3. 1,6845; 4. 2343,2; 5. 28709, 16959; 6. 4,536, 2,048.

14) 1. 275,53; 2. 42852000; 3. 5232,8; 4. 4,604.

IV. Aufgaben.

1. Aus dem Umfang u und den drei Winkeln α, β, γ eines Dreieckes soll man dessen Seiten berechnen.

2. Aus der Fläche f und den drei Winkeln α, β, γ eines Dreieckes soll man die Seiten berechnen.

3. Aus der Seite a und den anliegenden Winkeln β und γ soll man die Radien des ein- und der angeschriebenen Kreise berechnen.

4. Zur Bestimmung des Radius des einem Dreieck umschriebenen Kreises genügt die Kenntnis einer Seite a und des gegenüberliegenden Winkels α (warum?); man berechne hieraus den Radius.

5. Aus der Summe zweier Dreiecksseiten $a + b = 37,42$ und den gegenüberliegenden Winkeln $\alpha = 53^0\,27'$, $\beta = 68^0\,11'$ soll man die fehlenden Stücke berechnen.

6. Ebenso aus der Differenz $a - b = 9,27$ und den Winkeln $\alpha = 73^0\,15'\,48''$, $\beta = 53^0\,19'\,54''$.

7. Aus $a = 36,5$ m, $\gamma = 54^0\,30'$ und der Fläche $f = 690$ qm soll man die fehlenden Stücke berechnen.

8. Aus $a = 469$ m, $\alpha = 123^0\,20'$ und der Fläche $f = 28100$ qm soll man die fehlenden Stücke berechnen.

9. Der Inhalt eines Parallelogramms soll aus zwei zusammenstoßenden Seiten $a = 0,537$ m, $b = 0,847$ m und dem eingeschlossenen Winkel $\alpha = 101^0\,40'$ berechnet werden.

10. In einem Dreieck ist eine Seite $a = 127,2$ cm, die anliegenden Winkel sind $\beta = 58^0\,13'\,30''$, $\gamma = 31^0\,12'\,20''$. Die Seite a wird in 3 gleiche Teile geteilt und die Teilpunkte werden mit der Spitze verbunden; wie lang sind diese Verbindungslinien, und welche Winkel bilden sie an der Spitze?

11. In einem Dreieck ($a = 60$, $\beta = 57^0$, $\gamma = 46^0$) ver-

bindet man das erste Drittel (von a aus) von b mit dem zweiten Drittel von c; wie lang ist diese Verbindungslinie und wo schneidet sie die Verlängerung von a. (Wo liegt der Schnittpunkt, wenn man das 2. Drittel von b mit dem ersten von c verbindet?)

12. In einem Dreieck ist $\alpha = 11^0$, $\beta = 62^0\,21'$, $\gamma = 51^0\,12'$; man trägt auf c von a aus eine Strecke $d = 60$ ab und verlängert a über b hinaus um $e = 50$ und verbindet die Endpunkte von d und e; wo schneidet diese Verbindungslinie die Seite b?

13. In einem Dreieck kennt man die drei Seiten $a = 37{,}4$, $b = 54{,}8$, $c = 41{,}5$ und man zieht die Seitenhalbierungslinie von a und die zu b gehörige Höhe. Wo schneiden sich beide und unter welchem Winkel?

14. In einem Dreieck kennt man eine Seite $a = 85{,}2$; der Mittelpunkt des dem Dreieck eingeschriebenen Kreises hat von den Endpunkten von a die Entfernungen $e = 19{,}7$ und $f = 72{,}3$. Man berechne den Radius dieses Kreises, die andern Seiten des Dreieckes und die Entfernung des Mittelpunktes vom dritten Eck.

15. In einem Dreieck kennt man die Seite $a = 79{,}8$; der Mittelpunkt des dem Dreieck umschriebenen Kreises hat von a den Abstand $d = 15{,}9$ und von b den Abstand $e = 12{,}5$; welchen Abstand hat er von c und wie groß ist der Radius?

16. In einem Dreieck kennt man zwei Seiten = 42 cm und 26 cm; von den gegenüberliegenden Winkeln ist der erste doppelt so groß als der zweite; wie groß sind diese Winkel und die dritte Seite?

17. In einem Dreieck kennt man zwei Seiten = 5 und = 7; von den gegenüberliegenden Winkeln ist der zweite $1^1/_2$ mal so groß als der erste. Wie groß sind diese Winkel und die dritte Seite?

18. In einem Dreieck kennt man $a = 12{,}7$, $c = 32{,}9$ und den eingeschlossenen Winkel $\beta = 43^0\,17'$. Durch den anderen Endpunkt von c ist eine Gerade gezogen, welche die Verlängerung von a unter einem Winkel $\varepsilon = 54^0\,19'$ schneidet. Wie groß ist diese Verlängerung?

19. Auf den Schenkeln eines Winkels von 32^0 liegen zwei Punkte A und B, deren Entfernung $= 60$ ist; bewegt sich aber A auf seinem Schenkel so weit, daß seine Entfernung vom Scheitel $= 84$ ist, so ist die Entfernung der Punkte $AB = 55$. Wie weit sind A und B vom Scheitel entfernt? (Wie viele Lösungen?)

20. Die Grundlinie $a = 50$ cm eines gleichschenkeligen Dreieckes vom Basiswinkel $\beta = 65^0\, 18'$ wird beiderseits um die Länge des Schenkels verlängert und die Endpunkte werden mit der Spitze verbunden. Wie groß sind die Seiten des neuen Dreieckes?

21. Eine Tangente von der Länge $a = 115$ bildet mit der durch ihren Berührungspunkt gehenden Sehne $b = 72$ einen Winkel von $105^0\, 30'$. Wie groß ist der Radius des Kreises, die Länge der Sekante, welche die Endpunkte von Sehne und Sekante verbindet, und das außerhalb des Kreises liegende Stück der Sekante?

22. Eine Sehne von der Länge $c = 24{,}7$ schneidet in ihrer Verlängerung eine Tangente von der Länge $b = 32{,}7$ unter einem Winkel $\alpha = 47^0\, 19'$; wie groß ist der Radius des Kreises?

23. Zwei Kreise von den Radien R, r und dem Mittelpunktsabstand d sind gegeben; man berechne das ihnen gemeinsame Flächenstück.

$R = 22,\ 37 \quad r = 15,\ 8 \quad d = 28,\ 32.$

24. Zwei Kreise von den Radien $R = 11$ und $r = 9{,}4$ haben den Mittelpunktsabstand $d = 6{,}9$; wo liegt der Mittelpunkt eines Kreises vom Radius $R_1 = 16{,}4$, welcher durch die Schnittpunkte der beiden ersten Kreise geht.

25. Die Entfernung zweier durch ein Hindernis getrennter Punkte AB wird bestimmt, indem man von A aus eine Standlinie $AC = 133{,}6$ m abmißt und von ihren Endpunkten aus die Winkel $BAC = 73^0\, 44'\, 18''$ und $BCA = 82^0\, 16'\, 12''$ mißt. Wie groß ist AB?

26. Um die Entfernung zweier unzugänglichen Objekte A und B zu bestimmen, mißt man eine Standlinie $CD = 85$ m,

welche mit AB in einer Ebene liegt, und mißt die Winkel ACD = 111° 51′, ADC = 49° 53′, BCD = 29° 17′, BDC = 119° 19′. Wie groß ist AB?

27. Um die Entfernung zweier durch ein Hindernis getrennter Punkte AB zu bestimmen, mißt man in der Verlängerung von AB die Strecke BC = 280 m, mißt von B aus den Winkel DBC = 123° 54′ nach einem außerhalb AB gelegenen Punkte D und mißt in D die Winkel ADB = 98° 23′ und BDC = 23° 41. Wie groß ist AB?

28. Um die Entfernung ebensolcher Punkte AB zu bestimmen, mißt man in der Verlängerung von AB die Strecke CD = 164 m, mißt den Winkel DCE = 129° 47′ zu einem nach E führenden Punkte, mißt ferner von E aus die Winkel DEC = 21° 12′, CEB = 33° 5′, BEA = 61° 41′; wie groß ist AB?

29. Wie stellt sich die Lösung, wenn zwar C aber nicht D in der Verlängerung von AB liegen und ∢ DCE = 97° 12′ zu dem BCE = 71° 15′ und die anderen Winkel wie vorher gemessen werden?

30. Längs des Ufers eines Flusses ist eine Standlinie AB = 87 m abgesteckt und von deren Endpunkten werden die Winkel zu einem am andern Ufer liegenden Punkte D gemessen, nämlich DAB = 69° 7′ 20″ und DBA = 73° 38′ 10″. Wie breit ist der Fluß an dieser Stelle?

31. Am Fuße eines Abhanges steht ein Baum von 23 m Höhe. Die Sonne steht in einer Höhe von 49° 12′ und in der Richtung des Schattens hat der Abhang eine Neigung von 13°; wie lang ist der Schatten?

32. Begriff der Triangulation. Von einer Basis AB = 2580 m geht ein △ ABC aus, welches bei A 59° 53′ 40″, bei B 91° 17′ 20″ hat; an dieses schließt sich das △ BCD mit den Winkeln bei C = 90° 50′ 20″ und bei B = 41° 11′ 50″; an dieses schließt sich △ CDE mit den Winkeln bei C = 49° 17′ 10″ und bei D = 110° 18′; an dieses schließt sich △ DEF mit den Winkeln bei D = 36° 8′ 50″ und E = 99° 5′ 40″; darauf folgt △ EFG mit den Winkeln bei E = 67° 11′ 30″ und

$F = 66^0\,12'\,30''$; dann folgt $\triangle$ FGH mit den Winkeln bei $F = 39^0\,7'\,50''$ und $G = 105^0\,42'$, schließlich $\triangle$ GHJ mit den Winkeln bei $G = 35^0\,12'\,40''$, $H = 112^0\,59'\,10''$. Man soll daraus die Entfernung AJ berechnen und $\sphericalangle$ JAB. (Man berechne (AB), BD, DF, FH, HJ, projiciere sie auf eine passende Linie (etwa DF oder FH), berechne die Projektionen sowie die Projicierenden, dann leicht.) Zur leichteren Uebersicht berechne man zuerst nur AE oder AF.

33. Wie hoch ist ein Berg CC', wenn eine auf den Fuß des Berges hingerichtete horizontale Standlinie $AB = 417{,}5$ m lang ist und von ihren Endpunkten aus die Elevationswinkel $\alpha = 26^0\,37'\,40''$ $\beta = 33^0\,18'\,40''$ gemessen werden?

34. Wie hoch ist ein solcher Berg, wenn die Standlinie $AB = a$ selbst unter einem Winkel ε ansteigt und in A und B die Elevationswinkel α und β gemessen werden?

35. Um die Höhe eines Berges CC' zu messen, messe ich von A aus die Elevation C der Spitze ε des Berges, dann die horizontale Standlinie $AB = a$ und die horizontalen Winkel $C'AB = \alpha$ und $C'BA = \beta$; wie groß ist CC'?

36. Um die Höhe CC' und Breite AB eines Berges zu messen, mißt man in der Richtung der Breite AB eine horizontale Standlinie $BD = a$, und mißt von der Spitze C aus die Depressionswinkel von $A = \gamma$, $B = \alpha$, $D = \beta$; wie groß ist CC' und AB?

37. Wie stellt sich die Lösung der vorigen Aufgabe, wenn die Standlinie BD nicht horizontal ist, sondern selbst unter einem Winkel ε sich senkt (oder steigt)?

38. Auf einem Abhang steht eine Säule. Um deren Höhe zu finden, mißt man vom Fuße der Säule, den Abhang herabgehend, eine Strecke von 12,5 m, mißt von dort den Gesichtswinkel der Säule $= 37^0\,48'$, geht weitere 10,5 m den Abhang herab und mißt von dort wieder den Gesichtswinkel $= 31^0\,37'$. Wie hoch ist die Säule?

39. Ein Berg vom Querschnitt BCA (C ist Spitze, A höher als B), soll durch ein Tunnel AB durchstochen werden. Um dessen Größe und Richtung zu finden, mißt man auf jeder

Seite des Berges eine Standlinie AE = a, BD = b, und mißt von C aus die Depressionswinkel der Punkte E, A, B, F, und findet die Winkel ε, α, β, δ. Wie groß ist AB und welche Neigung hat es?

40. Wie stellt sich die Lösung dieser Aufgabe, wenn AE unter k^0, BD unter i^0 geneigt ist?

41. Die **Pothenot'sche Aufgabe.**

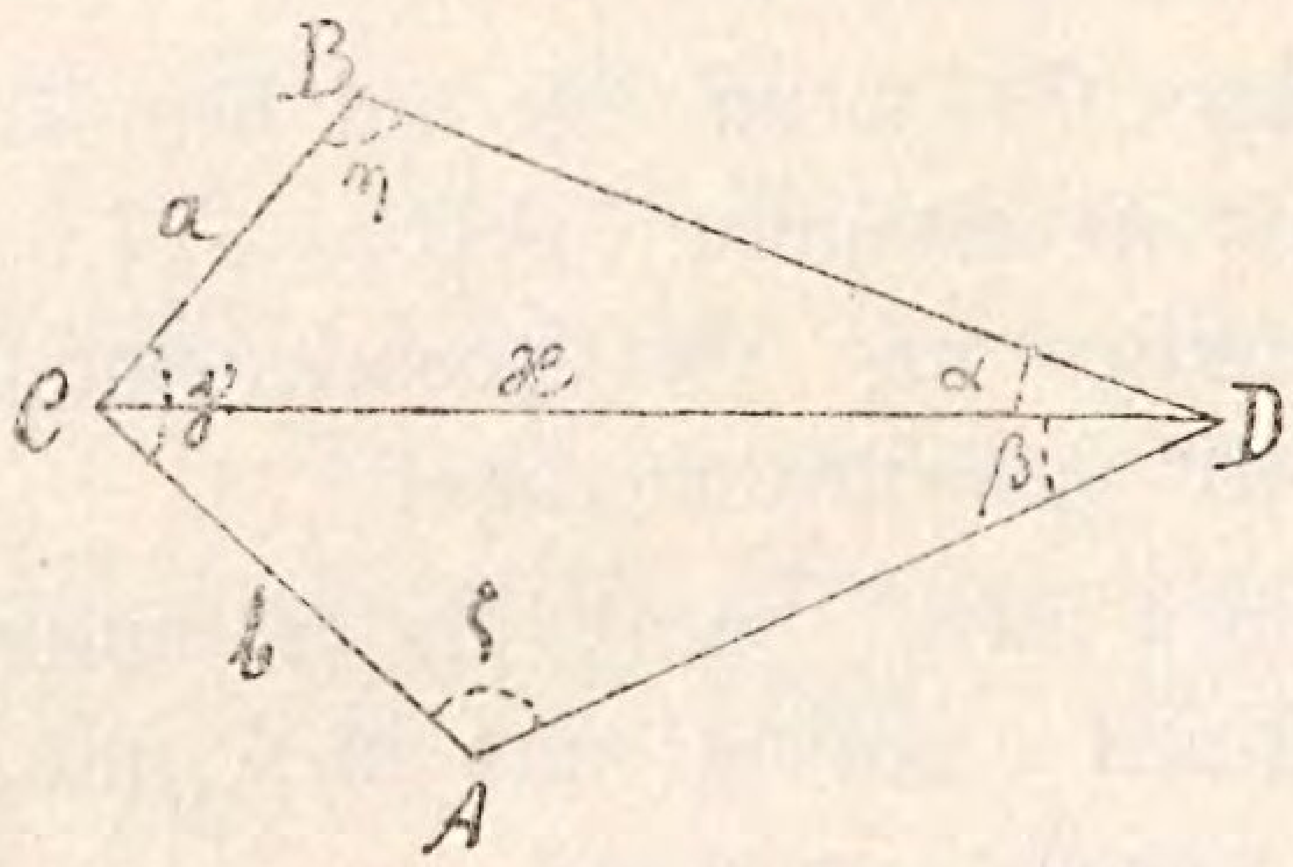


Fig. 22.

Drei Punkte A, B, C sind der Lage nach bekannt, etwa durch AC = b, BC = a, $\sphericalangle$ BCA = γ. Es soll die Lage eines vierten Punktes D bestimmt werden dadurch, daß man in D die Winkel BDC = α und ADC = β mißt.

Auflösung: Verzeichnet man CD mit x und $\sphericalangle$ B mit η, $\sphericalangle$ A mit ζ, so hat man für diese drei Unbekannten die Gleichungen:

I. $x : a = \sin\eta : \sin\alpha$,

II. $x : b = \sin\zeta : \sin\beta$.

III. $\eta + \zeta = 360 - \gamma - \alpha - \beta = \varkappa$.

Durch Vergleichung der Werte von x aus I und II folgt:

$$\frac{a \sin\eta}{\sin\alpha} = \frac{b \sin\zeta}{\sin\beta}, \text{ hieraus}$$

$$\sin\eta : \sin\zeta = b \sin\alpha : \alpha \sin\beta; \text{ hieraus:}$$

$$(\sin\eta + \sin\zeta) : (\sin\eta - \sin\zeta) = (b \sin\alpha + a \sin\beta) : (b \sin\alpha - a \sin\beta),$$

$$\frac{\sin {}^1\!/_2\,(\eta + \zeta)\cos {}^1\!/_2\,(\eta - \zeta)}{\cos {}^1\!/_2\,(\eta + \zeta)\sin {}^1\!/_2\,(\eta - \zeta)} = \frac{b \sin\alpha + \alpha \sin\beta}{b \sin\alpha - \alpha \sin\beta};$$

Dividiert man rechts Zähler und Nenner mit $b \sin\alpha$,

$$\operatorname{tang} {}^1\!/_2\,(\eta + \zeta)\cot {}^1\!/_2\,(\eta - \zeta) = \frac{1 + \dfrac{a \sin\beta}{b \sin\alpha}}{1 - \dfrac{a \sin\beta}{b \sin\alpha}};$$

man setzt $\dfrac{a \sin\beta}{b \sin\alpha} = \operatorname{tang}\varphi$, wobei φ ein Hülfswinkel ist, dessen

Größe aus dieser Gleichung gefunden wird, und man setzt $1 = \text{tang}\, 45^0$, so ist:

$$\text{tang}\, {}^1/_2\, (\eta + \zeta)\, \text{cotg}\, {}^1/_2\, (\eta - \zeta) = \frac{\text{tang}\, 45^0 + \text{tang}\, \varphi}{1 - \text{tang}\, 45^0\, \text{tang}\, \varphi}, \text{ also}$$

$$\text{cotg}\, {}^1/_2\, (\eta - \zeta) = \text{cotg}\, {}^1/_2\, (\eta + \zeta)\, \text{tang}\, (45 + \varphi).$$

Hieraus findet man $\eta - \zeta$, und da $\eta + \zeta = \varkappa$ schon bekannt, so ergeben sich η und ζ. Dann findet man leicht x, BD und AD (Sinussatz).

Die Aufgabe läßt noch manche andere Auflösungsarten zu, etwa folgende, wobei wir annehmen, D liege innerhalb des Dreiecks ABC.

I. $x : a = \sin \eta : \sin \alpha$:

II. $x : b = \sin \zeta : \sin \beta$;

III. $\eta + \zeta = 360 - \alpha - \beta - \gamma = \varkappa$; hieraus $\eta = \varkappa - \zeta$;

aus I und II folgt: $\dfrac{a \sin \eta}{\sin \alpha} = \dfrac{b \sin \zeta}{\sin \beta}$,

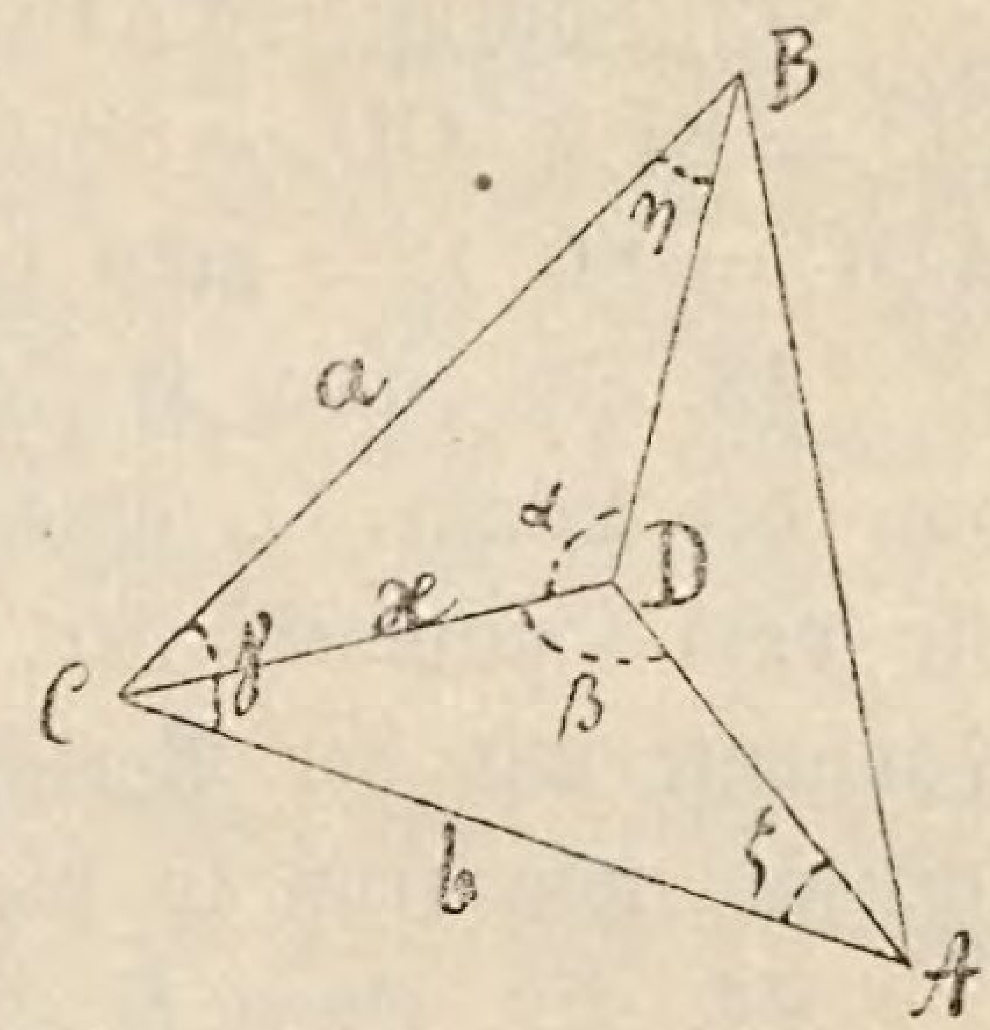


Fig. 23.

hieraus: $a \sin (\varkappa - \zeta) \sin \beta = b \sin \zeta \sin \alpha$,

$$a \sin \varkappa \cos \zeta \sin \beta - a \cos \varkappa \sin \zeta \sin \beta = b \sin \zeta \sin \alpha$$

dividirt man mit $\sin \zeta$ und löst auf:

$$\text{cotg}\, \zeta = \frac{b \sin \alpha + a \cos \varkappa \sin \beta}{a \sin \varkappa \sin \beta}$$

$$\text{cotg}\, \zeta = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \varkappa \sin \beta} + \text{cotg}\, \varkappa; \text{ setzt man } \frac{b \sin \alpha}{a \sin \varkappa \sin \beta} = \text{cotg}\, \varphi,$$

$$\text{cotg}\, \zeta = \text{cotg}\, \varphi + \text{cotg}\, \varkappa$$

$$\text{cotg}\, \zeta = \frac{\sin (\varkappa + \varphi)}{\sin \varkappa \sin \varphi}; \text{ hieraus } \zeta, \text{ dann wie früher.}$$

Diese Aufgabe ist besonders wichtig bei der Landesvermessung. Wenn nämlich die Seiten und Winkel eines hinlänglich großen Dreieckes ABC (mittels Basisvermessung und Triangulation wie in Aufgabe 32) bestimmt worden sind, ist man mittels des Pothenot'schen Problems im Stande, die Lage beliebiger anderer Punkte D innerhalb und außerhalb des Fundamentaldreieckes zu berechnen, und hat hiezu blos nöthig, von jedem Punkte D aus die Winkel der Sehlinien gegen die Ecken A, B, C

zu messen. Durch Verbindung benachbarter Punkte D (trigonometrischer Punkte zweiter Ordnung) wird das Land in kleinere Dreiecke zerlegt. Innerhalb derselben werden wieder mittels des Pothenot'schen Problems neue Punkte bestimmt (trigonometrische Punkte dritter Ordnung) und von diesen aus wird Lage, Form und Größe der Grundstücke gemessen (Kataster).

V. Vermischte Aufgaben.

42. Vom Viereck ABCD kennt man die drei Seitten AB = 58,7, BC = 81,9, CD = 83,4 und die Winkel ABC = 115° 20′ und ADC = 80° 12′; man berechne AD.

43. In einem Kreis vom Radius r = 15 ist eine Sehne von der Länge 17 gezogen und um so viel verlängert, daß die vom Endpunkt der Verlängerung an den Kreis gezogene Tangente mit der Verlängerung den Winkel α = 46° 12′ einschließt; wie groß ist die Verlängerung?

44. An einen Kreis vom Radius r = 9,24 m sind an zwei Punkten, deren Bogenabstand 43° 17′ beträgt, zwei Tangenten von je 28 m Länge gezogen und zwar in entgegengesetztem (oder in demselben) Sinne. Wie groß ist der Abstand ihrer Endpunkte.

45. Wie stellt sich die Lösung der vorigen Aufgabe, wenn die andere Tangente 32,7 m lang ist?

46. Die beiden parallelen Seiten eines Trapezes sind 39,84 m und 26,51 m; die der größeren Seite anliegenden Winkel sind 71° 51′ 10″ und 61° 4′ 39″; wie groß sind die nicht parallelen Seiten?

47. Von einem Dreieck kennt man zwei Seiten BC = 87,1 m und AC = 93,7 m und den eingeschlossenen Winkel C = 52° 12′. Man soll das Dreieck durch eine Transversale JK, welche mit CB den Winkel JKC = 57° 43′ bildet, so schneiden, daß das abgeschnittene Dreieck JCK gleich $^3/_7$ des gegebenen Dreieckes ACB wird.

48. Wie stellt sich die Lösung, wenn verlangt ist, daß JK durch die Mitte K von CB gehe und nach dem Winkel JKC gefragt ist, den sie mit CB bildet?

49. Die Seiten und Winkel eines Dreieckes sollen aus den drei Höhen h_a, h_b, h_c (20, 25, 29) berechnet werden.

50. In einem gleichschenkeligen Dreieck kennt man den Winkel an der Basis $\alpha = 54^0\,19'$ und die Summe der Höhen $h_a + h_b = 10$; wie groß sind seine Seiten?

51. In einem Dreieck kennt man eine Seite a = 17,4, die Summe der zwei Höhen $h_a + h_c = 37{,}5$ und den Winkel $\gamma = 73^0\,19'$. Man soll die fehlenden Stücke berechnen.

52. Von einer geraden Straße zweigt sich in A unter 45° nach rechts eine gerade Straße ab, auf welcher man nach $2^3/_4$ km nach C kommt und 4 km später zweigt sich in B noch eine gerade Straße nach rechts ab unter 60°, auf welcher man nach $4^1/_2$ km nach D kommt. Wie weit ist C von D entfernt? Wie stellt sich die Lösung, wenn die zweite nach D führende Straße sich nach links abzweigt?

53. Man soll ein Dreieck berechnen aus einer Seite a = 56,2 m, dem gegenüberliegenden Winkel $\alpha = 127^0\,12'$ und der Summe der beiden anderen Seiten 65,7 m.

54. Von einem Dreieck kennt man zwei einer Seite anliegende Winkel $\alpha = 57^0\,18'\,23''$, $\beta = 63^0\,12'\,44''$ und den Radius des an dieser Seite dem Dreieck angeschriebenen Kreises $\rho = 18{,}2$ cm. Wie groß ist diese Seite und der Radius des eingeschriebenen Kreises?

55. Wie stellt sich die Lösung, wenn das Dreieck rechtwinklig ist, z. B. $\alpha = 90^0$?

56. Man soll den Inhalt eines Dreieckes aus den drei Winkeln α, β, γ und einer Höhe h_a bestimmen.

57. Einem Kreis vom Radius r ist ein Dreieck von den Winkeln α, β, γ einbeschrieben; wie groß ist dessen Inhalt?

58. Einen Kreis vom Radius ρ ist ein Dreieck von den Winkeln α, β, γ umschrieben; wie groß ist dessen Fläche?

59. Aus dem Umfang u und den drei Winkeln α, β, γ eines Dreieckes soll man dessen Fläche berechnen.

60. Man soll die Fläche eines beliebigen Viereckes aus zwei gegenüberliegenden Seiten a und c und den vier Winkeln α, β, γ, δ berechnen. Wie gestaltet sich die erhaltene Formel um, wenn a und c die parallelen Seiten eines Trapezes sind?

61. Ist man 60 m horizontal vom Fuße eines senkrechten Gegenstandes entfernt, so erscheint dessen Spitze unter doppelt so großem Elevationswinkel, wie wenn man 150 m entfernt ist. Wie hoch ist der Gegenstand?

62. Wie hoch schwebt eine Wolke über einem See, wenn man auf einer Anhöhe, welche h Meter über dem See liegt, die Wolke unter einem Elevationswinkel α, und ihr Spiegelbild im See unter einem Depressionswinkel ε sieht?

63. Den oberen Teil eines Turmes, der sich zum unteren wie 2 : 5 verhält, sehe ich, wenn ich a Meter vom Fuße des Turmes entfernt bin, unter einem Gesichtswinkel α; wie hoch ist der Turm.

64. Zieht man vom Anfang, von der Mitte und vom Ende einer Strecke a Gerade nach einem außerhalb der Strecke liegenden Punkte, so verhalten sich diese wie m : n : o; wie lang sind sie und welche Winkel bilden sie mit der Strecke? m : n : o = 11 : 7 : 4.

65. Beobachtet man vom Anfang, von der Mitte und vom Ende einer horizontalen Standlinie von der Länge a die Elevationswinkel eines außerhalb dieser Standlinie stehenden Turmes, so findet man die Winkel α, β, γ; wie hoch ist der Turm.

66. Wie stellt sich die Lösung der vorigen zwei Aufgaben, wenn die Punkte A, B, C nicht Anfang, Mitte und Ende der Strecke AC sind, sondern wenn AB = a, BC = b ist.

67. Von der Spitze eines Berges von der Höhe h erscheinen zwei in der Horizontalebene liegende Punkte unter den Depressionswinkeln α und β, während die nach ihnen gerichteten Visierlinien den Winkel γ bilden. Wie groß ist die gegenseitige Entfernung der zwei Punkte.

68. Wie stellt sich die Lösung der vorigen Aufgabe, wenn unter γ der Winkel gemeint ist, den die Horizontalprojektionen der Visierlinien bilden?

69. In einer Ebene befinden sich vier Punkte in einer geraden Linie, A, B, C, D, so daß AB = a, CD = b. Von einem fünften außerhalb der Geraden liegenden Punkte O mißt

man die Winkel $AOB = \alpha$, $BOC = \beta$, $COD = \gamma$. Man berechne hieraus die Strecke BC.

70. Von drei Punkten A, B, C, die nicht in einer horizontalen Ebene liegen, liegt A am tiefsten, von ihm aus steigt $AB = a$ unter einem Winkel ε und von B aus steigt BC unter dem Winkel δ. Die Horizontalprojektionen der Visierlinien AC und AB bilden den Winkel α und die Horizontalprojektionen der Visierlinien BA und BC bilden den Winkel β. Wie lang ist AC und welche Neigung hat es?

71. Wie findet sich Länge und Neigung der Linie BC der vorhergehenden Aufgabe, wenn $AB = a$ die Neigung ε, $AC = b$ die Neigung δ hat und die Horizontalprojektionen der Visierlinien AB und AC den Winkel γ bilden?

72. Ein Abhang hat eine Neigung von $\alpha = 20^0$. Von einem Punkte A am Fuße desselben soll eine Straße so auf ihm angelegt werden, daß sie nur eine Neigung $\beta = 8^0$ habe. Auf welchen Punkt B am Rücken des Abhangs muß sie hingerichtet werden?

73. Würde man eine Straße gerade über einen Abhang hinaufführen von A nach A', so hätte sie die Länge l und die Neigung des Abhanges $\alpha = 20^0$. Führt man sie aber von A nach einem Punkte B, welcher auf dem Rücken des Abhanges liegt und von A' den Abstand 3 l hat, welche Neigung hat sie dann?

74. Ein Treibriemen läuft um drei Riemenscheiben, deren Mittelpunkte A, B, C die Abstände $AB = 3{,}6$ m, $BC = 2{,}5$ m, $CA = 5{,}2$ m haben und deren Radien $r_a = 70$ cm, $r_b = 20$ cm, $r_c = 50$ cm sind. Wie lang ist der Treibriemen?

75. An einen Kreis vom Radius $r = 5$ ist im Punkte A eine Tangente $AB = a = 12$ gezogen; in ihrem Endpunkte B ist auf ihr eine Senkrechte $BC = b = 10$ errichtet und von C ist wieder eine Tangente CA' an den Kreis gezogen. Wie groß ist ihre Länge nebst dem Bogenstück AA'. Man berücksichtige, daß von C aus zwei Tangenten möglich sind, sowie auch, daß die Senkrechte BC nach zweierlei Richtungen gezogen werden kann.

76. Um den Abstand zweier durch einen Bergrücken getrennten Punkte J und K zu finden, stecke ich vor dem Bergrücken die Basis AB = a ab, messe die Winkel JAB = α, JBA = β; da ich von A nicht nach K sehen kann, füge ich den Zwischenpunkt C ein, messe die Winkel CAB = γ und CBA = δ, schließlich den Winkel JBK = ε und KCB = i. Wie berechnet sich die Distanz JK (aus passend gewählten Werten der Winkel und Basis)?

77. Einen vertikalen Turm sehe ich von einem in der horizontalen Ebene liegenden Punkte unter dem Winkel α^0; entferne ich mich aber in der Richtung des Turmes um eine Strecke, welche a Meter lang ist und unter ε^0 ansteigt, so sehe ich den Turm unter dem Gesichtswinkel γ; wie hoch ist der Turm?

78. Von einem Dreieck ABC kennt man AB = a = 6854, AC = 9263 und $\sphericalangle$ BAC = γ = 83° 54′ 27″. Von einem außerhalb des Dreiecks liegenden Punkte D aus mißt man die Winkel ADB = δ = 18° 17′ 9″ und ADC = ε = 53° 40′ 41″ und von einem innerhalb des Dreiecks liegenden Punkte E aus mißt man die Winkel AEB = i = 95° 2′ 41″ und AEC = k = 122° 29′ 14″. Man berechne ED.

79. Beweise den Satz: Projiziert man eine ebene Fläche auf eine zu ihr unter einem Winkel α geneigte Ebene, so ist die Projektion gleich dem Produkt aus der Fläche mal dem Cosinus des Neigungswinkels.

80. Ein Dreieck ABC, dessen Seite AC horizontal liegt, hat gegen die horizontale Ebene eine Neigung = ε, und wird auf die Horizontalebene projiziert. Aus AC = b = 38,72 m, $\sphericalangle$ BAC = α = 64° 19′ 22″ und $\sphericalangle$ BCA = γ = 53° 9′ 41″ sowie ε = 22° 13′ berechne man die Seiten und Winkel der Projektion ADC. Umgekehrt berechne man aus entsprechenden Stücken von ADC die Stücke von ABC.

III. Abschnitt.

Sphärische Trigonometrie.

19.

Ein sphärisches Dreieck ist ein Stück einer Kugelfläche, das begrenzt wird von drei sich nicht in einem Punkte schneidenden Hauptkreisen der Kugel. Die Ebenen der Kreise bilden im Kugelmittelpunkt ein körperliches Eck. Die Kantenwinkel des körperlichen Eckes können gemessen werden durch die Seiten des sphärischen Dreieckes, ∢ AOB = c, ∢ AOC = b, ∢ COB = a; die Flächenwinkel des körperlichen Eckes werden gemessen durch die Winkel des sphärischen Dreieckes ∢ OA = α, ∢ OB = β, ∢ OC = γ.

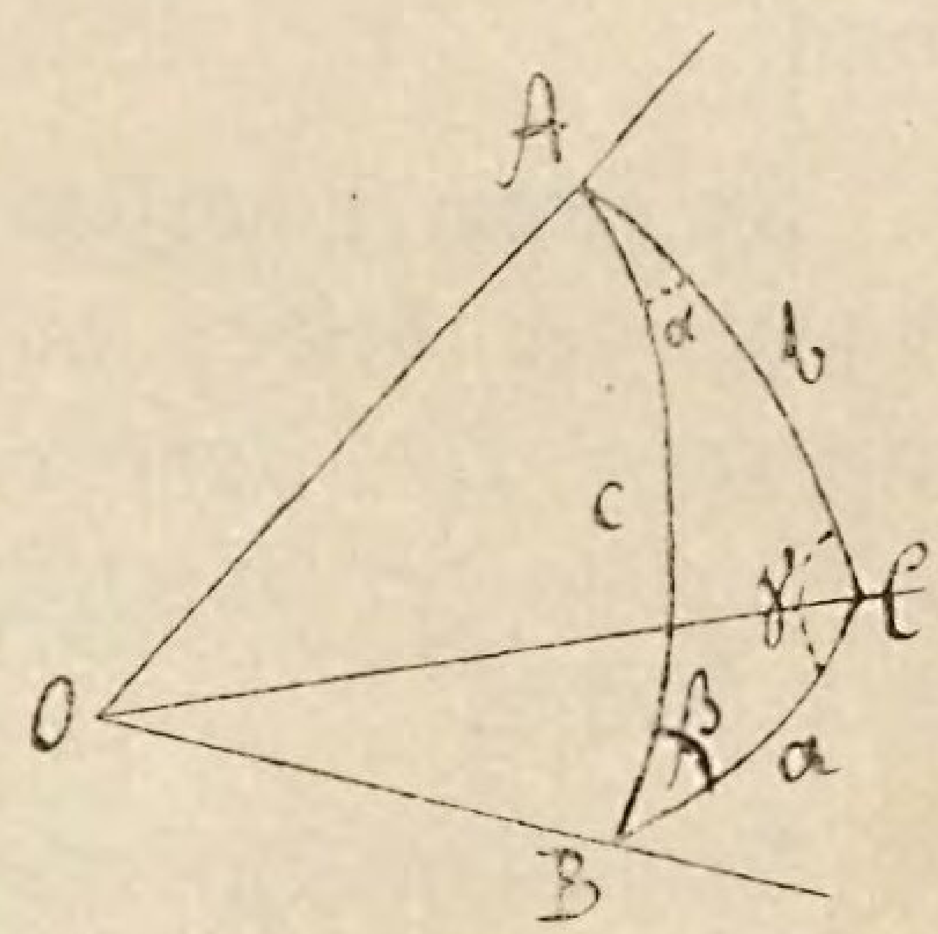


Fig. 24.

Die sphärische Trigonometrie handelt von den Beziehungen zwischen den Kanten- und Flächenwinkeln körperlicher Dreikante, oder zwischen den Seiten und Winkeln sphärischer Dreiecke, in welchen die Ebenen des Eckes durch eine um dessen Spitze beschriebene Kugel geschnitten werden. Wenn umgekehrt von den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreieckes gesprochen wird, so können darunter stets die Kanten- und Flächenwinkel des körperlichen Eckes verstanden werden, welches vom Mittelpunkt der Kugel aus durch die Kreise des sphärischen Dreieckes bestimmt wird.

Für die sphärischen Dreiecke gelten demnach die Sätze über körperliche Dreikante nämlich:

Zu jedem sphärischen Dreieck gibt es ein Scheiteldreieck, dessen Ecken denen des gegebenen Dreiecks im Durchmesser gegenüber liegen. Das Scheiteldreieck ist dem gegebenen Dreieck symmetrisch, d. h. es besitzt dieselben Seiten und Winkel nur in umgekehrter Reihenfolge; ein symmetrisches Dreieck kann stets als Scheiteldreieck gelegt werden.

Zu jedem sphärischen Dreieck gibt es ein Polardreieck, welches man erhält, wenn man zu jedem Eck als Pol den zugehörigen größten Kreis der Kugel construiert; die erhaltenen drei größten Kreise, Polarkreise, bestimmen das Polardreieck. Jede Seite eines Dreieckes und der gegenüberliegende Winkel des Polardreieckes sind supplementär; jeder Winkel des Dreieckes und die gegenüberliegende Seite des Polardreieckes sind supplementär.

In jedem sphärischen Dreieck ist eine Seite kleiner als die Summe der beiden anderen Seiten und größer als deren Differenz. Die Summe der Seiten ist kleiner als 4 Rechte, die Summe der Winkel ist kleiner als 6 Rechte und größer als 2 Rechte.

Sphärische Dreiecke haben dieselben Bestimmungsmerkmale der Congruenz (oder Symmetrie) wie körperliche Dreikante.

Im sphärischen Dreieck liegen gleichen Seiten gleiche Winkel und gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber; dem größeren Winkel liegt die größere Seite, der größeren Seite liegt der größere Winkel gegenüber.

Da zur Bestimmung des sphärischen Dreieckes von den 6 Bestimmungsstücken desselben (drei Seiten und drei Winkel) blos drei erforderlich sind, so entsteht für die sphärische Trigonometrie die Aufgabe: aus drei Bestimmungsstücken eines sphärischen Dreieckes die übrigen drei Bestimmungsstücke desselben zu finden. Diese Aufgabe wird gelöst durch die Sätze der folgenden Kapitel, in denen die allgemein gebräuchliche Bezeichnung beibehalten wird, daß die Seiten des sphärischen Dreieckes mit a, b, c, die gegenüberliegenden Winkel mit α, β, γ bezeichnet werden.

20.

Sinussatz. Die Sinus zweier Seiten verhalten sich wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.

$\sin a : \sin b = \sin \alpha : \sin \beta.$

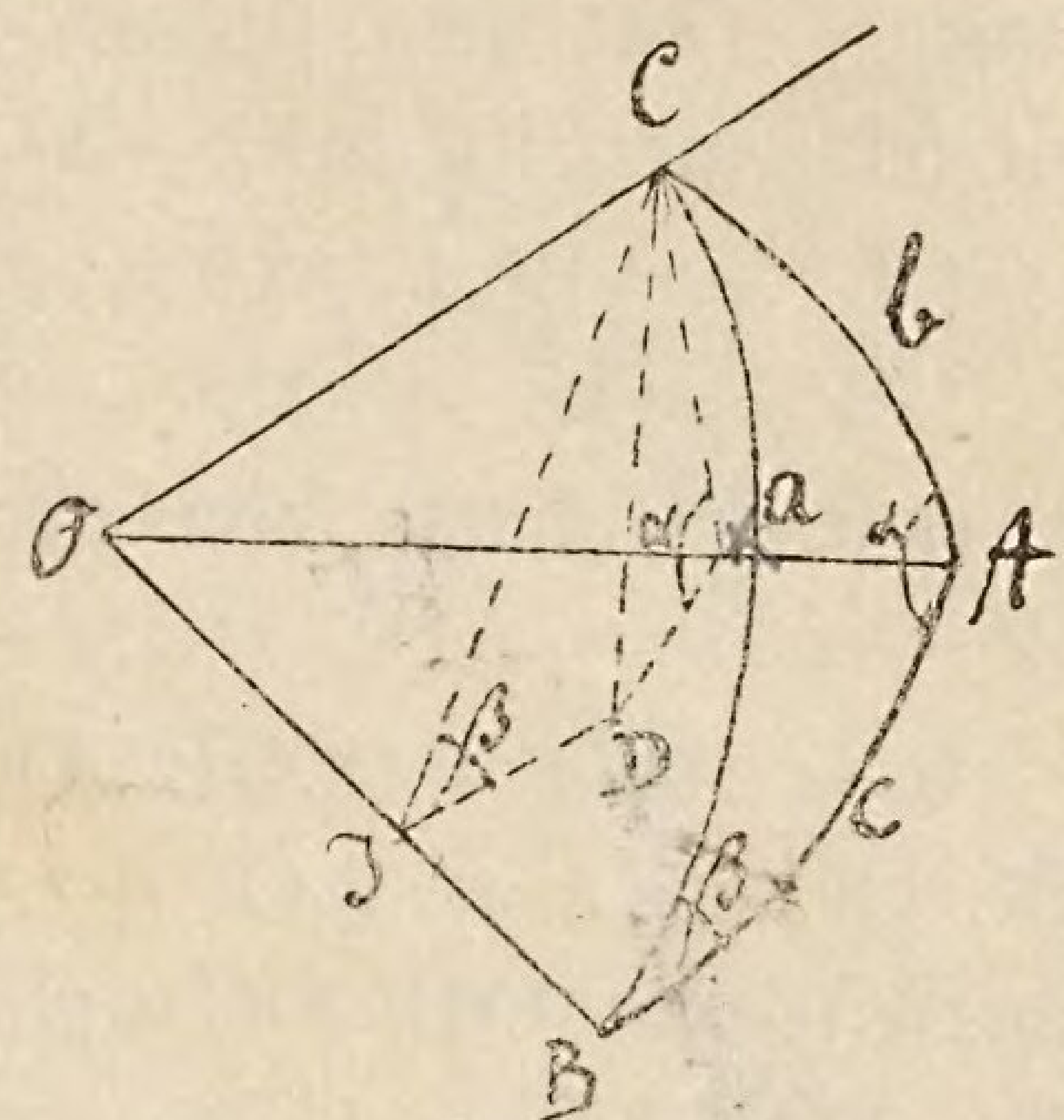


Fig. 25.

Beweis. Man bilde zum sphärischen Dreieck das zugehörige körperliche Eck OABC, zieht CD $\perp$ Eb AOB, DK $\perp$ OA, DJ $\perp$ OB, und zieht CJ und CK, so ist $\sphericalangle$ CJD = Flw. (OB) = β, $\sphericalangle$ CKD = Flw. (OA) = α.

Da nun $\frac{CD}{CJ} = \sin \beta$, $CD = CJ \sin \beta$ und

$\frac{CD}{CK} = \sin \alpha$, $CD = CK \sin \alpha$, so ist comp.

$$1.\quad CJ \sin \beta = CK \sin \alpha.$$

Aber $\frac{CJ}{CO} = \sin a$, $CJ = CO \sin a$,

und $\frac{CK}{CO} = \sin b$, $CK = CO \sin b$, beides in 1. gibt

$CO \sin a \sin \beta = CO \sin b \sin \alpha$; hieraus

$$\sin a : \sin b = \sin \alpha : \sin \beta.$$

Ebenso $\sin a : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta$, also:

$$\sin a : \sin \alpha = \sin b : \sin \beta = \sin c : \sin \gamma.$$

21.

Cosinussatz. Der Cosinus einer Seite ist gleich dem Produkt der Cosinus der beiden andern Seiten vermehrt um das Produkt der Sinus dieser Seiten mal dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels.

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

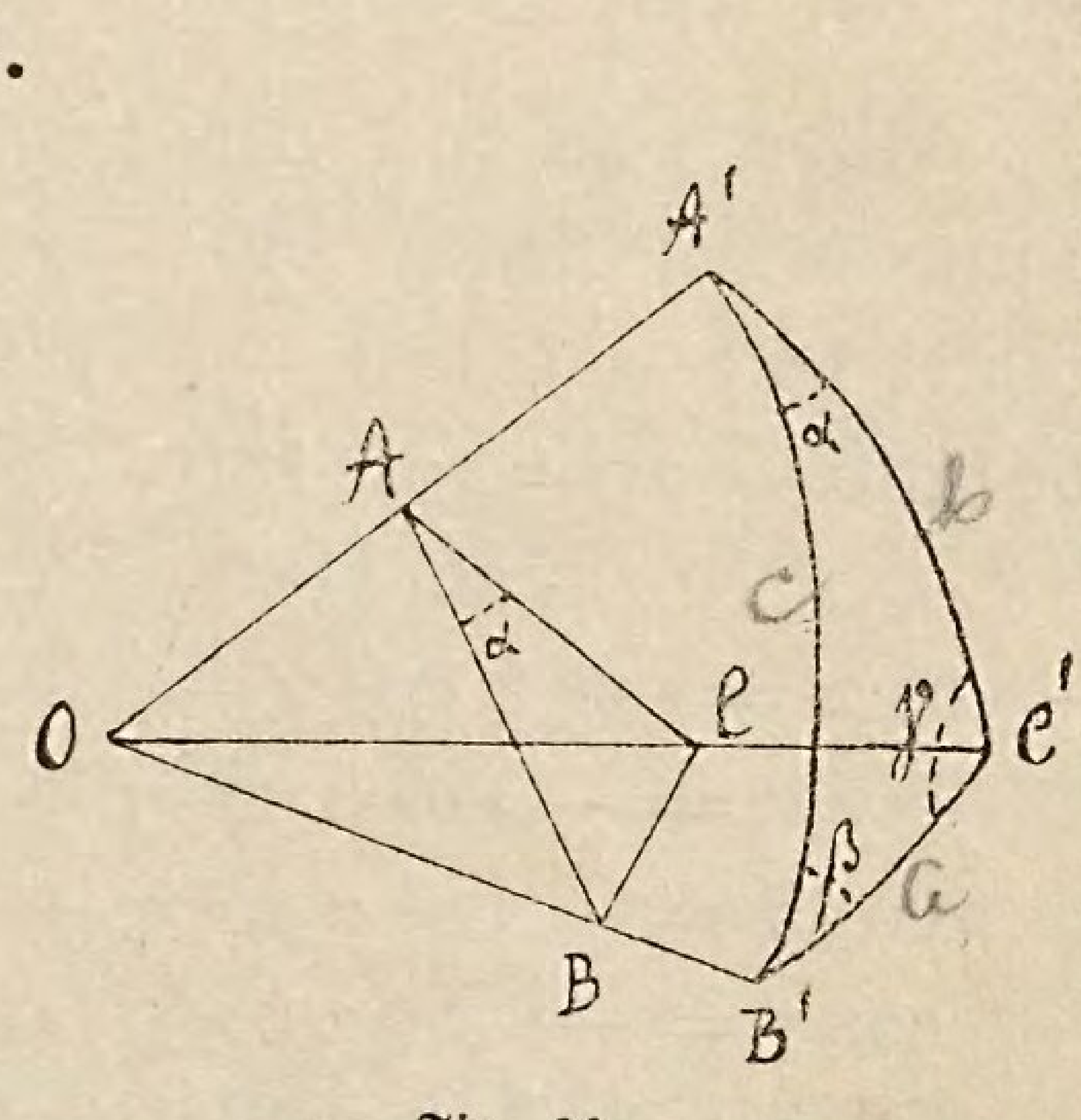


Fig. 26.

Beweis. Man konstruiere zum sphärischen Dreieck das zugehörige Dreikant $OA'B'C'$, schneide dasselbe durch eine Eb ACB, welche $\perp OA'$ steht, so ist $\sphericalangle CAB =$ Flw $(OA') = \alpha$ und man hat einerseits in $\triangle ACB$, andrerseits in $\triangle OCB$:

$CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \alpha$,

$CB^2 = OB^2 + OC^2 - 2\, OB \cdot OC \cos a$; subtrahiert man die erste Gleichung von der zweiten und berücksichtigt, daß $OB^2 - AB^2 = AO^2$, $OC^2 - AC^2 = AO^2$, so ist:

$0 = 2\, AO^2 - 2\, OB \cdot OC \cos a + 2\, AB \cdot AC \cos \alpha$, oder $OB \cdot OC \cos a = AO^2 + AB \cdot AC \cdot \cos \alpha$. Dividiert man beiderseits mit $OB \cdot OC$ und führt rechts statt der Quotienten $\frac{AO}{OB}, \frac{AO}{OC}, \frac{AB}{OB}, \frac{AC}{OC}$ die entsprechenden trigonometrischen Funktionen ein, so hat man:

$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$; ebenso

$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta$, und

$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$.

Anmerkung. Der Beweis bedarf einer Vervollständigung, weil, wenn b oder c oder beide stumpf sind, die in A errichteten Senkrechten AB und AC die zugehörigen Schenkel OB' und OC' nicht schneiden. Zur Uebung mache man die Beweise. Ist etwa b stumpf, so erweitere man b und a über c hinaus, nehme das an c anliegende Dreieck mit den Seiten c, $180 - b$, $180 - a$ und dem Winkel $180 - \alpha$. Sind beide stumpf, so erweitere man sie über A' hinaus und hat ein Dreieck mit $180 - b$, $180 - c$, a, α.

Bildet man zu diesem sphärischen Dreieck das Polardreieck, so sind dessen Seiten $180 - \alpha$, $180 - \beta$, $180 - \gamma$, und dessen Winkel $180 - a$, $180 - b$, $180 - c$, also hat man im Polareck:

$$\cos (180 - a) = \cos (180 - \beta) \cos (180 - \gamma)$$
$$+ \sin (180 - \beta) \sin (180 - \gamma) \cos (180 - a),$$

$- \cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos a$, oder

$\cos \alpha = - \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$, ebenso

$\cos \beta = - \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \cos b$, und

$\cos \gamma = - \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c$.

Dies gilt für das Polareck, also auch für ein beliebiges Eck.

22.

Cotangentensatz. Hat man vier aufeinanderfolgende Stücke (Seite, Winkel, Seite Winkel), und betrachtet die Seite als das erste, so ist Cotangens des ersten mal Sinus des dritten gleich Cotangens des vierten mal Sinus des zweiten plus dem Produkt der Cosinus der mittleren.

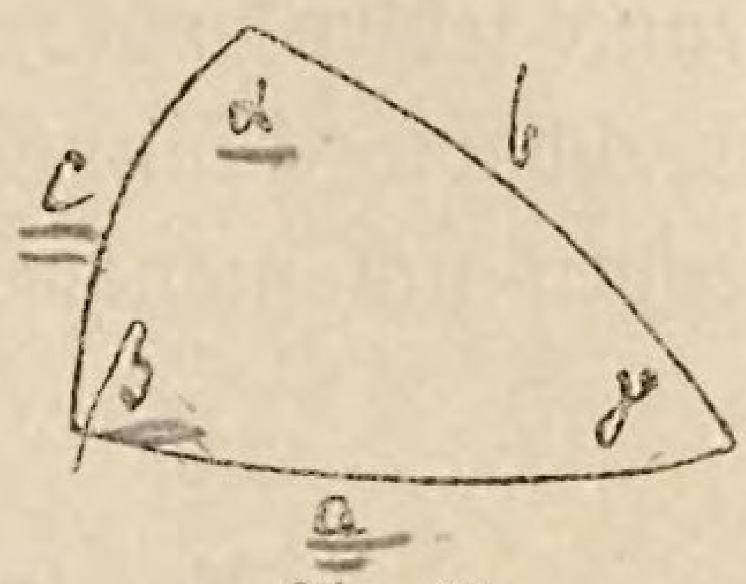


Fig. 27.

$$\cot a \sin c = \cot \alpha \sin \beta + \cos c \cos \beta.$$

Beweis. Es ist nach 21

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha; \text{ aber}$$

$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta$; dies in die erste Gleichung eingesetzt gibt:

$$\cos a = \cos a \cos^2 c + \sin a \sin c \cos c \cos \beta + \sin b \sin c \cos \alpha,$$
$$\cos a\,(1 - \cos^2 c) = \sin a \sin c \cos c \cos \beta + \sin b \sin c \cos \alpha,$$
$$\cos a \sin^2 c = \sin a \sin c \cos c \cos \beta + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

Dividiert man beiderseits mit $\sin a \sin c$, so ist:

$$\operatorname{cotg} a \sin c = \cos c \cos \beta + \frac{\sin b}{\sin a} \cos \alpha; \text{ aber } \frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha},$$

$$\text{also } \operatorname{cotg} a \sin c = \cos c \cos \beta + \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cos \alpha, \text{ oder:}$$

$$\operatorname{cotg} a \sin c = \operatorname{cotg} \alpha \sin \beta + \cos c \cos \beta; \text{ ebenso:}$$
$$\operatorname{cotg} a \sin b = \operatorname{cotg} \alpha \sin \gamma + \cos b \cos \gamma,$$
$$\operatorname{cotg} b \sin a = \operatorname{cotg} \beta \sin \gamma + \cos a \cos \gamma,$$
$$\operatorname{cotg} b \sin c = \operatorname{cotg} \beta \sin \alpha + \cos c \cos \alpha,$$
$$\operatorname{cotg} c \sin a = \operatorname{cotg} \gamma \sin \beta + \sin a \sin \beta,$$
$$\operatorname{cotg} c \sin b = \operatorname{cotg} \gamma \sin \alpha + \sin b \sin \alpha.$$

(Geht man wie in 23 auf das Supplementardreieck über, so entstehen dieselben Formeln wieder.)

Diese drei Sätze genügen zur Auflösung jedes sphärischen Dreieckes; denn jeder Satz enthält vier Größen, liefert also, wenn drei davon gegeben sind, die vierte.

Wählt man aber von den (gleichsam im Kreise herumliegenden Größen) a β c α b γ auf beliebige Weise vier aus, so hat man stets entweder vier aufeinanderfolgende (Cotg.-Satz, zwei benachbarte fehlen) oder drei aufeinanderfolgende und die

dem mittleren derselben gegenüberliegende (Cosinussatz, zwei getrennte fehlen) oder zwei benachbarte und zwei gegenüberliegend benachbarte (Sinussatz, zwei gegenüberliegende fehlen). Doch ergeben sich manche Lösungen in unbequemer Form.

23.

Rechtwinkliges sphärisches Dreieck.

Ein sphärisches Dreieck heißt rechtwinkelig, wenn ein Winkel ein Rechter ist. (Es sei $\gamma = 90^0$.) Die diesem Winkel gegenüberliegende Seite c heißt Hypotenuse, die anliegenden Seiten a und b heißen Katheten.

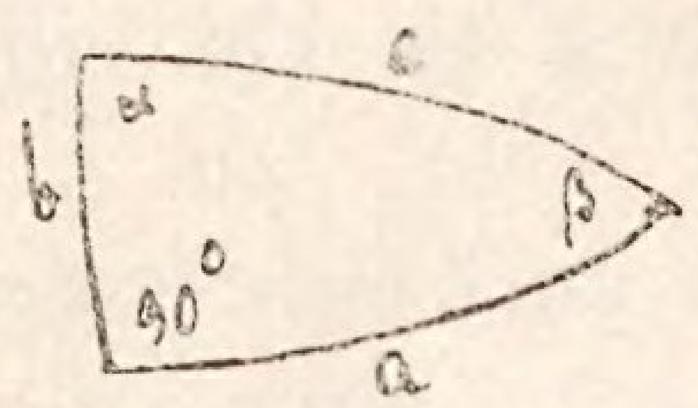


Fig. 28.

Es ist unnötig, eigene Formeln für das rechtwinkelige Dreieck aufzustellen, da die drei Fundamentalsätze unter Berücksichtigung von $\gamma = 90^0$ zur Auflösung desselben genügen. Es ergeben sich 6 Fälle.

1. Gegeben zwei Winkel, α, β; gesucht a, b, c.

$\cos\alpha = -\cos\beta \cos\gamma + \sin\beta \sin\gamma \cos a$, also

$$\cos a = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}, \text{ ebenso } \cos b = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}.$$

$\cos\gamma = -\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \cos c$, also

$$\cos c = \operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta.$$

2. Gegeben a, α, gesucht b, β, c.

$\operatorname{cotg} a \sin b = \operatorname{cotg}\alpha \sin\gamma + \cos b \cos\gamma$, also

$$\sin b = \operatorname{cotg}\alpha \operatorname{tang} a;$$

$\cos\alpha = -\cos\beta \cos\gamma + \sin\beta \sin\gamma \cos a$, also

$$\sin\beta = \frac{\cos\alpha}{\cos a};$$

$\sin c : \sin\gamma = \sin a : \sin\alpha$; also $\sin c = \frac{\sin a}{\sin\alpha}.$

3. Gegeben b, α, gesucht a, β, c.

$\operatorname{cotg} a \sin b = \cot\alpha \sin\gamma + \cos b \cos\gamma$, also

$$\operatorname{tang} a = \sin b \operatorname{tang}\alpha;$$

$\cos\beta = -\cos\alpha \cos\gamma + \sin\alpha \sin\gamma \cos b$, also

$$\cos\beta = \sin\alpha \cos b;$$

$\operatorname{cotg} c \sin b = \operatorname{cotg}\gamma \sin\alpha + \cos b \cos\alpha$, also

$$\operatorname{cotg} c = \operatorname{cotg} b \cos\alpha.$$

4. Gegegeben c, α; gesucht a, b, β.

$\sin a : \sin \alpha = \sin c : \sin \gamma$, also $\sin a = \sin c \sin \alpha$;

$\operatorname{cotg} c \sin b = \operatorname{cotg} \gamma \sin \alpha + \cos b \cos \alpha$, also

$$\operatorname{tang} b = \operatorname{tang} c \cos \alpha;$$

$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c$, also

$$\operatorname{cotg} \beta = \operatorname{tang} \alpha \cos c.$$

5. Gegeben a, b, gesucht α, β, c.

$\operatorname{cotg} a \sin b = \operatorname{cotg} \alpha \sin \gamma + \cos b \cos \gamma$, also

$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg} a \sin b$ und $\operatorname{cotg} \beta = \operatorname{cotg} b \sin a$;

$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin c \cos \gamma$, also

$$\cos c = \cos a \cos b.$$

6. Gegeben a, c, gesucht α, β, b.

$\sin a : \sin c = \sin \alpha : \sin \gamma$, also $\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}$;

$\operatorname{cotg} c \sin a = \operatorname{cotg} \gamma \sin \beta + \cos a \cos \beta$, also

$$\cos \beta = \operatorname{tang} a \operatorname{cotg} c;$$

$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$, also

$$\cos b = \frac{\cos c}{\cos a}.$$

Beispiele.

1. $\alpha = 27^0 40' 10''$, $\beta = 73^0 34' 20''$;
   $a = 22^0 34' 50''$, $b = 52^0 29' -''$, $c = 55^0 47' -''$.

   $\alpha = 83^0 41' 20''$, $\beta = 79^0 15' 50''$;
   $a = 83^0 34' 30''$, $b = 79^0 11' 50''$, $c = 88^0 47' 50''$.

   $\alpha = 20^0 8' 30''$, $\beta = 101^0 17' 20''$;
   $a = 16^0 47' 30''$, $b = 124^0 38' 40''$, $c = 122^0 58' 30''$.

   $\alpha = 122^0 50' 10''$, $\beta = 113^0 2' 10''$;
   $a = 126^0 6' 10''$, $b = 117^0 45' 20''$, $c = 74^0 4' 20''$.

2. $a = 57^0 12' 30''$, $\alpha = 61^0 7' 40''$;
   $b = 58^0 51' 20''$, $\beta = 63^0 4' 10''$, $c = 73^0 44'$
   oder $b' = 121^0 8' 40''$, $\beta' = 116^0 55' 50''$, $c = 106^0 16' -''$.

   $a = 15^0 24' 10''$, $\alpha = 75^0 6'$;
   $b = 4^0 12' 10''$, $\beta = 15^0 28' 10''$, $c = 15^0 57' 10''$
   $b' = 175^0 47' 50''$, $\beta' = 164^0 31' 50''$, $c' = 164^0 2' 50''$

$a = 137^0\, 23'\, —''$, $\alpha = 64^0\, 5'\, 20''$;
$b = 206^0\, 33'\, —''$, $\beta = 216^0\, 25'\, 40''$, $c = 48^0\, 49'\, 50''$
$b' = 333^0\, 27'$, $\beta' = 323^0\, 34'\, 20''$, $c' = 131^0\, 10'\, 10''$.
$a = 132^0\, 37'\, 40''$, $\alpha = 128^0\, 19'\, 30''$;
$b = 59^0\, 10'\, 50''$, $\beta = 66^0\, 18'$, $c = 110^0\, 18'\, 10''$
$b' = 120^0\, 49'\, 10''$, $\beta' = 113^0\, 42'$, $c' = 69^0\, 41'\, 50''$.

3. $b = 20^0\, 42'\, 10''$, $\alpha = 37^0\, 12'\, 20''$;
$a = 15^0\, 1'\, 20''$, $\beta = 55^0\, 33'\, 10''$, $c = 25^0\, 23'\, —''$.
$b = 41^0\, 9'\, 30''$, $\alpha = 159^0\, 27'\, —''$;
$a = 166^0\, 8'\, 30''$, $\beta = 74^0\, 40'\, 30''$, $c = 136^0\, 58'\, —''$.
$b = 104^0\, 38'\, 10''$, $\alpha = 4^0\, 13'\, 20''$;
$a = 4^0\, 5'\, 10''$, $\beta = 91^0\, 4'$, $c = 104^0\, 35'\, 50''$.
$b = 117^0\, 16'\, 40''$, $\alpha = 172^0\, 19'$;
$a = 173^0\, 9'\, 50''$, $\beta = 93^0\, 30'\, 50''$, $c = 62^0\, 56'$.

4. $c = 50^0\, 2'\, 20''$, $\alpha = 18^0\, 16'\, 30''$;
$a = 13^0\, 54'\, 30''$, $b = 48^0\, 34'\, 20''$, $\beta = 78^0\, 1'\, 30''$.
$c = 172^0\, 19'\, 40''$, $\alpha = 22^0\, 40'\, 10''$;
$a = 2^0\, 57'$, $b = 172^0\, 54'\, 50''$, $\beta = 112^0\, 29'\, 10''$.
$c = 70^0\, 19'\, 20''$, $\alpha = 142^0\, 39'\, 20''$;
$a = 145^0\, 10'$, $b = 114^0\, 13'\, 10''$, $\beta = 104^0\, 24'\, 40''$.
$c = 120^0\, 15'\, 30''$, $\alpha = 156^0\, 19'\, 40''$;
$a = 159^0\, 42'\, 30''$, $b = 57^0\, 30'\, 10''$, $\beta = 77^0\, 32'\, 40''$.

5. $a = 8^0\, 2'\, 50''$, $b = 87^0\, 12'\, 20''$;
$\alpha = 8^0\, 3'\, 20''$, $\beta = 89^0\, 36'\, 30''$, $c = 87^0\, 14'$.
$a = 99^0\, 42'\, 50''$, $b = 81^0\, 13'\, 10''$;
$\alpha = 99^0\, 36'\, 10''$, $\beta = 81^0\, 20'\, 40''$, $c = 91^0\, 28'\, 30''$
$a = 97^0\, 58'\, 30''$, $b = 107^0\, 41'\, 30''$
$\alpha = 97^0\, 36'\, 10''$, $\beta = 107^0\, 31'\, 50''$, $c = 87^0\, 35'$

6. $a = 20^0\, 53'\, 10''$, $c = 54^0\, 9'\, 20''$
$\alpha = 26^0\, 5'\, 30''$, $\beta = 74^0\, —'\, —''$, $b = 51^0\, 11'\, 20''$
$a = 74^0\, 33'\, 10'$, $c = 96^0\, 38'\, 50''$
$\alpha = 76^0\, 1'\, 30''$, $\beta = 114^0\, 56'\, 40''$, $b = 115^0\, 45'\, 30''$
$a = 168^0\, 3'\, 10''$, $c = 50^0\, 47'\, 10''$
$\alpha = 164^0\, 30'\, 10''$, $\beta = 99^0\, 56'\, 30''$, $b = 130^0\, 15'\, 20''$
$a = 176^0\, 15'\, 20''$, $c = 122^0\, 7'\, 10''$
$\alpha = 175^0\, 34'\, 40''$, $\beta = 87^0\, 38'\, 40''$, $b = 57^0\, 48'\, 10''$.

Schiefwinkeliges sphärisches Dreieck.

24.

Zur bequemen logarithmischen Berechnung allgemeiner sphärischer Dreiecke dienen noch folgende Sätze.

a. Die Sätze der halben Winkel.

Es ist nach dem Cosinussatz:

$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a$; hieraus

$\cos a = \dfrac{\cos\alpha + \cos\beta\,\cos\gamma}{\sin\beta\,\sin\gamma}$; dies eingesetzt in

$\cos {}^1/_2\, a = \sqrt{\dfrac{1+\cos a}{2}}$ gibt:

$$\cos {}^1/_2\, a = \sqrt{\frac{\sin\beta\,\sin\gamma + \cos\alpha + \cos\beta\,\cos\gamma}{2\sin\beta\,\sin\gamma}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos\alpha + \cos(\beta-\gamma)}{2\sin\beta\,\sin\gamma}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\cos {}^1/_2(\alpha+\beta-\gamma)\,\cos {}^1/_2(\alpha-\beta+\gamma)}{2\sin\beta\,\sin\gamma}}$$

Setzt man ${}^1/_2(\alpha+\beta+\gamma) = \sigma$, so ist ${}^1/_2(\alpha+\beta-\gamma) = \sigma-\gamma$, und ${}^1/_2(\alpha-\beta+\gamma) = \sigma-\beta$, also

$\cos {}^1/_2\, a = \sqrt{\dfrac{\cos(\sigma-\beta)\,\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta\,\sin\gamma}}$; ebenso

$\cos {}^1/_2\, b = \sqrt{\dfrac{\cos(\sigma-\alpha)\,\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\alpha\,\sin\gamma}}$, und

$\cos {}^1/_2\, c = \sqrt{\dfrac{\cos(\sigma-\alpha)\,\cos(\sigma-\beta)}{\sin\alpha\,\sin\beta}}$.

Durch Einsetzen in $\sin {}^1/_2\, a = \sqrt{\dfrac{1-\cos a}{2}}$ erhält man ebenso:

$$\sin {}^1/_2\, a = \sqrt{-\frac{\cos\sigma\,.\,\cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\,\sin\gamma}},$$

$$\sin {}^1/_2\, b = \sqrt{-\frac{\cos\sigma\,.\,\cos(\sigma-\beta)}{\sin\alpha\,\sin\gamma}},$$

$$\sin {}^1/_2\, c = \sqrt{-\frac{\cos\sigma\,\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\alpha\,\sin\beta}}.$$

Da $\alpha + \beta + \gamma$ zwischen 2 R und 6 R liegt, so liegt σ zwischen R und 3 R, somit ist $\cos\sigma$ stets negativ, wodurch das negative Zeichen fortfällt.

Durch Division erhält man:

$$\tang {}^1/_2 a = \sqrt{-\frac{\cos\sigma \,.\, \cos(\sigma - \alpha)}{\cos(\sigma - \beta)\cos(\sigma - \gamma)}},$$

$$\cotg {}^1/_2 a = \sqrt{-\frac{\cos(\sigma - \beta)\cos(\sigma - \gamma)}{\cos\sigma\cos(\sigma - \alpha)}}.$$

Aehnlich erhält man aus:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$ und durch Einsetzen in die Formel für den cos oder sin des halben Winkels:

$$\cos {}^1/_2 \alpha = \sqrt{\frac{\sin {}^1/_2 (a + b + c) \sin {}^1/_2 (-a + b + c)}{\sin b \sin c}}$$

Setzt man ${}^1/_2 (a + b + c) = s$, ${}^1/_2 (-a + b + c) = s - a$ u. s. w., so ist

$$\cos {}^1/_2 \alpha = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}, \quad \sin {}^1/_2 \alpha = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}}$$

$$\cos {}^1/_2 \beta = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin a \sin c}}, \quad \sin {}^1/_2 \beta = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a \sin c}}$$

$$\cos {}^1/_2 \gamma = \sqrt{\frac{\sin s \,.\, \sin(s-c)}{\sin a \sin b}}, \quad \sin {}^1/_2 \gamma = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a \sin b}}.$$

$$\tang {}^1/_2 \alpha = \sqrt{\frac{\sin(s - b)\sin(s - c)}{\sin s \,.\, \sin(s - a)}},$$

$$\cotg {}^1/_2 \alpha = \sqrt{\frac{\sin s \,.\, \sin(s - a)}{\sin(s - b)\sin(s - c)}}.$$

b. Die Gauß'schen oder Delambre- oder Mollweide'sche Gleichungen.

Es ist:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}}, \quad \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin a \sin c}}.$$

Durch Multiplikation:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}=\frac{\sin(s-b)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin s\ \sin(s-c)}{\sin a\ \sin b}},\text{ oder}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}=\frac{\sin(s-b)}{\sin c}\cos{}^1/_2\,\gamma;\text{ ebenso}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}=\frac{\sin(s-a)}{\sin c}\cos{}^1/_2\,\gamma.$$

Durch Addition beider Gleichungen wird:

$$\sin{}^1/_2(\alpha+\beta)=\frac{\cos{}^1/_2\,\gamma}{\sin c}(\sin[s-b]+\sin[s-a])$$

$$=\frac{\cos{}^1/_2\,\gamma}{\sin c}.2\sin{}^1/_2(2s-a-b)\cos{}^1/_2(a-b)$$

$$=\frac{\cos{}^1/_2\,\gamma\ .\ 2\sin{}^1/_2\,c\cos{}^1/_2\,(a-b)}{2\sin{}^1/_2\ c\cos{}^1/_2\,c},\text{ also}$$

$$\text{I. }\sin{}^1/_2(\alpha+\beta)=\frac{\cos{}^1/_2\,(a-b)}{\cos{}^1/_2\,c}\cos{}^1/_2\,\gamma.$$ Ebenso durch Subtraktion:

$$\text{II. }\sin{}^1/_2(\alpha-\beta)=\frac{\sin{}^1/_2\,(a-b)}{\sin{}^1/_2\,c}\cdot\cos{}^1/_2\,\gamma.$$

Man bildet ebenso:

$$\cos{}^1/_2\,\alpha\ .\ \cos{}^1/_2\,\beta=\frac{\sin s}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\ \sin(s-b)}{\sin a\ \sin b}}$$

$$=\frac{\sin s}{\sin c}\sin{}^1/_2\,\gamma\text{ und}$$

$$\sin{}^1/_2\,\alpha\ .\ \sin{}^1/_2\,\beta=\frac{\sin(s-c)}{\sin c}\sin{}^1/_2\,\gamma.$$

Durch Subtraktion und Addition dieser Gleichungen erhält man:

$$\text{III. }\cos{}^1/_2(\alpha+\beta)=\frac{\cos{}^1/_2\,(a+b)}{\cos{}^1/_2\,c}\sin{}^1/_2\,\gamma.$$

$$\text{IV. }\cos{}^1/_2(\alpha-\beta)=\frac{\sin{}^1/_2\,(a+b)}{\sin{}^1/_2\,c}\sin{}^1/_2\,\gamma.$$

c. Die Neper'schen Analogien.

Dividiert man von den Gauß'schen Gleichungen I : III und II : IV, so erhält man:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(a - b)}{\cos \tfrac{1}{2}(a + b)} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\gamma.$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(a - b)}{\sin \tfrac{1}{2}(a + b)} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\gamma.$$

Dividiert man noch IV : III und II : I, so ist:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a + b) = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c.$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a - b) = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c.$$

Die analogen Formeln für andere Seiten und Winkel sind leicht zu bilden.

(Die Neper'schen Analogien entsprechen dem Tangentensatz der ebenen Trigonometrie und können leicht in analoger Form geschrieben werden.)

25.

Berechnung sphärischer Dreiecke aus drei gegebenen Stücken.

1. Gegeben drei Seiten a, b, c, gesucht die Winkel α, β, γ.

Man hat nach 21 $\cos \alpha = \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$ oder nach 24 a

$$\cos \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s - a)}{\sin b \sin c}}, \quad \sin \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin(s - b) \sin (s - c)}{\sin b \sin c}}$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin s \sin (s - a)}}.$$

Beispiele.

1. $a = 35^0\,19'\,20''$, $b = 43^0\,47'\,10''$, $c = 54^0\,9'\,50''$,
   $\alpha = 45^0\,29'\,30''$, $\beta = 58^0\,35'\,50''$, $\gamma = 90^0\,30'\,40''$.
2. $a = 135^0\,20'\,10''$, $b = 72^0\,7'\,50''$, $c = 81^0\,59'\,20''$,
   $\alpha = 143^0\,8'$ —'', $\beta = 54^0\,19'\,20''$, $\gamma = 57^0\,41'\,20''$.
3. $a = 137^0\,8'\,40''$, $b = 119^0\,21'\,40''$, $c = 29^0\,12'\,10''$,
   $\alpha = 135^0\,50'\,40''$, $\beta = 63^0\,12'\,30''$, $\gamma = 29^0\,58'\,50''$.
4. $a = 136^0\,25'\,10''$, $b = 118^0\,17'\,20''$, $c = 96^0\,21'\,20''$,
   $\alpha = 152^0\,35'$ —'', $\beta = 143^0\,58'\,30''$, $\gamma = 138^0\,24'\,30''$.

2. Gegeben die drei Winkel α, β, γ, gesucht a, b, c.

Man hat nach 21: $\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\ \cos\gamma}{\sin\beta\ \sin\gamma}$, oder nach 24a:

$$\cos {}^1\!/_2\, a = \sqrt{\frac{\cos(\sigma - \beta)\ \cos(\sigma - \gamma)}{\sin\beta\ \sin\gamma}}.$$

$$\sin {}^1\!/_2\, a = \sqrt{-\frac{\cos\sigma\ \cos(\sigma - \alpha)}{\sin\beta\ \sin\gamma}};$$

$$\operatorname{tang} {}^1\!/_2\, a = \sqrt{-\frac{\cos\sigma\ \cos(\sigma - \alpha)}{\cos(\sigma - \beta)\ \cos(\sigma - \gamma)}}.$$

Beispiele.

1. $\alpha = 87^0\, 20'\, 10''$, $\beta = 74^0\, 31'\, 20''$, $\gamma = 82^0\, 12'\, 30''$
$a = 85^0\ 2'\, 10''$, $b = 73^0\, 58'\, 40''$, $c = 81^0\, 10'\, 30''$.

Auch die Beispiele von 1 umgekehrt.

3. Gegeben zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, a, b, γ; gesucht c, α, β.

Man hat $\cos c = \cos a\ \cos b + \sin a\ \sin b\ \cos\gamma$; hieraus c.

Ferner: $\operatorname{cotg} a\ \sin b = \operatorname{cotg}\alpha\ \sin\gamma + \cos b\ \cos\gamma$; hieraus

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\operatorname{cotg} a\ \sin b - \cos b\ \cos\gamma}{\sin\gamma};\ \text{ebenso}$$

$$\operatorname{cotg}\beta = \frac{\operatorname{cotg} b\ \sin a - \cos a\ \cos\gamma}{\sin\gamma}.$$

Man kann diese Formeln für logarithmische Rechnung bequemer machen; scheidet man nämlich bei der ersten cos a als Faktor aus, so ist:

$$\cos c = \cos a\ (\cos b + \operatorname{tang} a\ \sin b\ \cos\gamma);$$

setzt man $\operatorname{tang} a\ \cos\gamma = \operatorname{tang}\varphi$ (hieraus φ), so ist:

$$\cos c = \cos a\,.\,\frac{\cos b\ \cos\varphi + \sin b\ \sin\varphi}{\cos\varphi}$$

$$\cos c = \frac{\cos a\,.\,\cos(b - \varphi)}{\cos\varphi};\ \text{hieraus c.}$$

Aehnlich bei den andern Formeln, indem man im Zähler $\cos\gamma$, oder cotg b resp. cotg a ausscheidet.

Beispiel: Für $a = 37^0\, 12'$, $b = 58^0\, 17'$, $\gamma = 62^0\, 40'$ ist $\varphi = 19^0\, 12'\, 50''$, $c = 49^0\, 5'\, 20''$; ferner ist

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\operatorname{cotg} a\ (\sin b - \cos b\ \operatorname{tang} a\ \cos\gamma)}{\sin\gamma};\ \text{setzt man}$$

$\tang a \,.\, \cos\gamma = \tang\psi$, $\psi = 19^0\,12'\,50''$, so ist

$$\cotg\alpha = \frac{\cotg a \,\sin(b-\psi)}{\sin\gamma \,\cos\psi} = \frac{\cotg\gamma \,\sin(b-\psi)}{\sin\psi};$$

$$\alpha = 45^0\,17'\,20''.$$

Ebenso $\cotg\beta = \dfrac{\cotg b\,(\sin a - \cos a \,\cos\gamma \,\tang b)}{\sin\gamma}$; setzt man $\tang b \,\cos\gamma = \tang\psi'$, $\psi' = 36^0\,36'\,40''$, so ist

$$\cotg\beta = \frac{\cotg b \,\sin(a-\psi')}{\sin\gamma \,\cos\psi'} = \frac{\cotg\gamma \sin(a-\psi')}{\sin\psi'};$$

$$\gamma = 89^0\,29'\,20''.$$

Am einfachsten geht die Berechnung mittels der Neper'schen Analogien (24 c), welche α und β liefern, worauf c mittels des Sinussatze berechnet wird.

Beispiele:

2. $a = 112^0\,49'\,20''$, $b = 84^0\,31'\,10''$, $\gamma = 169^0\,14'\,20''$, $\alpha = 150^0\;\,7'\,40''$, $\beta = 147^0\,27'\,30''$, $c = 159^0\,47'\,10''$.
3. $a = 150^0\,29'\,10''$, $b = 136^0\,17'\,10''$, $\gamma = 84^0\,21'\,20''$, $\alpha = 139^0\;\,7'\,10''$, $\beta = 113^0\,21'\,10''$, $c = 48^0\,30'\,30''$.

4. Gegeben eine Seite und zwei anliegende Winkel a, β, γ, gesucht α, b, c.

Es ist: $\cos\alpha = -\cos\beta \,\cos\gamma + \sin\beta \,\sin\gamma \,\cos a$.

Ferner: $\cotg c \,\sin a = \cotg\gamma \,\sin\beta + \cos a \,\cos\beta$;

hieraus: $\cotg c = \dfrac{\cotg\gamma \,\sin\beta + \cos\alpha \,\cos\beta}{\sin a}$,

ebenso $\cotg b = \dfrac{\cotg\beta \,\sin\gamma + \cos a \,\cos\gamma}{\sin a}$.

Für bequemere Rechnung macht man ähnliche Umformungen wie in 3 oder wendet die Neperschen Analogien an.

Beispiele:

1. $a = 18^0\,37'\,40''$, $\beta = 44^0\,39'\,10''$, $\gamma = 32^0\,28'\,30''$, $\alpha = 104^0\;\,2'\,20''$, $b = 13^0\,22'\,46''$, $c = 10^0\,10'\,58''$.
2. $a = 36^0\,12'\,40''$, $\beta = 77^0\,29'\,10''$, $\gamma = 133^0\,27'\,20''$, $\alpha = 43^0\,52'\,40''$, $b = 123^0\,41'\,11''$, $c = 141^0\,46'\,35''$.
3. $a = 74^0\,16'\,10''$, $\beta = 169^0\,12'\,20''$, $\gamma = 145^0\,39'\,40''$, $\alpha = 141^0\,29'\,10''$, $b = 163^0\,10'\,20''$, $c = 119^0\,18'\,50''$.
4. $a = 157^0\,25'\,30''$, $\beta = 10^0\,44'\,-''$, $\gamma = 67^0\,-'\,20''$, $\alpha = 122^0\,49'\,20''$, $b = 4^0\,52'\,50''$, $c = 155^0\;\,7'\,50''$.

5. $a = 119^0\,54'\,50''$, $\beta = 160^0\,14'\,—''$, $\gamma = 70^0\,11'\,40''$,
$\alpha = 80^0\,47'\,10''$, $b = 162^0\,43'\,30''$, $c = 55^0\,42'\,30''$.

5. Gegeben zwei Seiten und der einer Seite gegenüberliegende Winkel, a, b, β, gesucht α, γ, c.

Es ist: $\sin\alpha = \frac{\sin a \ \sin\beta}{\sin b}$; hieraus α.

Ferner: $\operatorname{cotg} b \ \sin a = \operatorname{cotg}\beta \ \sin\gamma + \cos a \ \cos\gamma$.

Um hieraus γ zu finden, dividiert man mit cos a

$$\operatorname{cotg} b \ \operatorname{tang} a = \frac{\operatorname{cotg}\beta}{\cos a} \sin\gamma + \cos\gamma.$$

Man setzt $\operatorname{cotg}\beta : \cos a = \operatorname{tang}\varphi$ (hieraus φ), so ist

$$\operatorname{tang} a \ \operatorname{cotg} b = \frac{\cos(\varphi - \gamma)}{\cos\varphi}, \text{ also}$$

$$\cos(\varphi - \gamma) = \cos\varphi \ \operatorname{tang} a \ \operatorname{cotg} b.$$

Hieraus φ — γ also γ.

Ferner $\cos b = \cos a \ \cos c + \sin a \ \sin c \ \cos\beta$.

Um hieraus c zu finden, dividiert man mit cos a

$\frac{\cos b}{\cos a} = \cos c + \operatorname{tang} a \ \sin c \ \cos\beta$; man setzt $\cos\beta \ \operatorname{tang} a$ $= \operatorname{tang}\psi$ (hieraus ψ), so ist $\frac{\cos b}{\cos a} = \frac{\cos(\psi - c)}{\cos\psi}$, also

$$\cos(\psi - c) = \frac{\cos b \ \cos\psi}{\cos a}; \text{ hieraus } \psi - c \text{ also } c.$$

Jede der drei Größen α, γ, c ergibt sich hiebei in zweierlei Werten, so daß die Aufgabe zweideutig ist.

Es ist hiebei φ und ψ zugleich mit a spitz oder stumpf, und ist nur negativ zu nehmen, wenn $\beta > 90^0$ ist. $\varphi - \gamma$ und $\psi - c$ sind $\mp$ zu nehmen.

Zieht man in △ ABC den Bogen CJ ⊥ AB, so ist ∢ JCB = φ, ∢ JCA = γ — φ, Bog. JB = ψ, Bog. AJ = c — ψ. Die Berechnung derselben aus den gegebenen Stücken a, b, β mag zur Uebung versucht werden.

Beispiele.

1. $a = 37^0\,40'\,10''$, $b = 12^0\,16'\,—''$, $\beta = 20^0\,9'\,10''$;
$\alpha_1 = 82^0\,17'\,20''$, $\gamma_1 = 81^0\,41'\,15''$, $c_1 = 37^0\,36'\,3''$;
$\alpha_2 = 97^0\,42'\,40''$, $\gamma_2 = 65^0\,54'\,57''$, $c_2 = 34^0\,15'\,57''$.

2. $a = 64^\circ\,7'\,40''$, $b = 59^\circ\,12'\,30''$, $\beta = 32^\circ\,18'\,20''$;
$\alpha_1 = 34^\circ\,2'\,25''$, $\gamma_1 = 145^\circ\,29'\,56''$, $c_1 = 114^\circ\,25'\,52''$;
$\alpha_2 = 145^\circ\,57'\,35''$, $\gamma_2 = 3^\circ\,39'\,4''$, $c_2 = 5^\circ\,52'\,30''$.

3. $a = 35^\circ\,20'\,40''$, $b = 43^\circ\,17'\,-''$, $\beta = 84^\circ\,37'\,20''$;
$\alpha_1 = 57^\circ\,8'\,44''$, $\gamma_1 = 48^\circ\,9'\,36''$, $c_1 = 30^\circ\,52'\,1''$;
$\alpha_2 = 122^\circ\,51'\,16''$, $\gamma_2 = 325^\circ\,-'\,22''$, $c_2 = 336^\circ\,44'\,19''$.

4. $a = 122^\circ\,43'\,20''$, $b = 52^\circ\,37'\,10''$, $\beta = 51^\circ\,31'\,20''$;
$\alpha_1 = 55^\circ\,58'\,47''$, $\gamma_1 = 172^\circ\,15'\,11''$, $c_1 = 172^\circ\,8'\,9''$;
$\alpha_2 = 124^\circ\,1'\,13''$, $\gamma_2 = 76^\circ\,11'\,19''$, $c_2 = 99^\circ\,42'\,21''$.

5. $a = 153^\circ\,17'\,-''$, $b = 83^\circ\,12'\,40''$, $\beta = 41^\circ\,10'\,-''$;
$\alpha_1 = 17^\circ\,20'\,21''$, $\gamma_1 = 215^\circ\,52'\,42''$, $c_1 = 242^\circ\,8'\,23''$;
$\alpha_2 = 162^\circ\,39'\,39''$, $\gamma_2 = 40^\circ\,6'\,20''$, $c_2 = 76^\circ\,21'\,27''$.

6. $a = 74^\circ\,23'\,10''$, $b = 127^\circ\,-'\,20''$, $\beta = 55^\circ\,47'\,-''$;
$\alpha_1 = 85^\circ\,46'\,10''$, $\gamma_1 = 241^\circ\,23'\,55''$, $c_1 = 237^\circ\,59'\,2''$;
$\alpha_2 = 94^\circ\,13'\,50''$, $\gamma_2 = 255^\circ\,24'\,53''$, $c_2 = 249^\circ\,9'\,46''$.

7. $a = 60^\circ\,4'\,20''$, $b = 83^\circ\,58'\,-''$, $\beta = 123^\circ\,12'\,30''$;
$\alpha_1 = 46^\circ\,48'\,56''$, $\gamma_1 = 30^\circ\,55'\,25''$, $c_1 = 37^\circ\,38'\,51''$;
$\alpha_2 = 133^\circ\,11'\,4''$, $\gamma_2 = 223^\circ\,42'\,13''$, $c_2 = 235^\circ\,12'\,25''$.

8. $a = 33^\circ\,1'\,10''$, $b = 27^\circ\,53'\,-''$, $\beta = 137^\circ\,6'\,40''$;
$\alpha_1 = 52^\circ\,28'\,-''$, $\gamma_1 = 348^\circ\,54'\,35''$, $c_1 = 352^\circ\,24'\,16''$;
$\alpha_2 = 127^\circ\,32'\,-''$, $\gamma_2 = 266^\circ\,55'\,5''$, $c_2 = 316^\circ\,41'\,18''$.

6. Gegeben eine Seite, ein anliegender und ein gegenüberliegender Winkel, a, α, β; gesucht b, c, γ.

Es ist: $$\sin b = \frac{\sin\beta \sin a}{\sin\alpha}.$$

Ferner $\operatorname{cotg} a \sin c = \operatorname{cotg}\alpha \sin\beta + \cos c \cos\beta$.

Um c zu finden, dividiert man mit $\cos\beta$, so ist
$$\frac{\operatorname{cotg} a}{\cos\beta}\sin c - \cos c = \operatorname{cotg}\alpha \operatorname{tang}\beta;$$
man setzt $\operatorname{cotg} a : \cos\beta = \operatorname{cotg}\varphi$ (hieraus φ), so ist
$\sin c \cos\varphi - \cos c \sin\varphi = \operatorname{cotg}\alpha \operatorname{tang}\beta \sin\varphi$,
$\sin(c - \varphi) = \operatorname{cotg}\alpha \operatorname{tang}\beta \sin\varphi$; hieraus $c - \varphi$, also c.

Ferner $\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a$:
hieraus $\cos\alpha = -\cos\beta(\cos\gamma - \operatorname{tang}\beta\cos a \sin\gamma)$;
man setzt $\operatorname{tang}\beta\cos a = \operatorname{cotg}\psi$ (hieraus ψ), so ist

$$\cos\alpha = -\cos\beta\,(\cos\gamma - \operatorname{cotg}\psi\,\sin\gamma),$$
$$\cos\alpha\,\sin\psi = -\cos\beta\,\sin(\psi - \gamma),$$
$$\sin(\gamma - \psi) = \frac{\cos\alpha\,\sin\psi}{\cos\beta};$$ hieraus $\gamma - \psi$, also γ.

Wie bei 5 wird die Lösung eine doppelte. φ und ψ sind zugleich mit a spitz und stumpf und sind nur negativ zu nehmen, wenn $\beta > 90^0$. $c - \varphi$ und $\gamma - \psi$ sind als spitz und als stumpf zu nehmen.

Zieht man im Dreieck ABC den Bogen CJ $\perp$ AB, so ist Bog JB $= \varphi$, Bog AJ $= c - \varphi$, $\sphericalangle$ JCB $= \psi$, $\sphericalangle$ JCA $= \gamma - \psi$, und die Berechnung derselben aus den gegebenen Stücken a, α, β mag zur Uebung versucht werden.

Beispiele.

1.	$a = 59^0\,43'\,10''$,	$\alpha = 49^0\,21'\,20''$,	$\beta = 53^0\,19'\,40''$
	$b_1 = 65^0\,54'\,6''$,	$c_1 = 101^0\,10'\,1''$,	$\gamma_1 = 120^0\,27'\,29''$
	$b_2 = 114^0\,5'\,54''$,	$c_2 = 170^0\,7'\,27''$,	$\gamma_2 = 171^0\,19'\,57''$
2.	$a = 73^0\,11'\,—''$,	$\alpha = 81^0\,49'\,20''$,	$\beta = 63^0\,4'\,10''$
	$b_1 = 59^0\,33'\,51''$,	$c_1 = 69^0\,53'\,38''$,	$\gamma_1 = 76^0\,10'\,33''$
	$b_2 = 120^0\,26'\,9''$,	$c_2 = 222^0\,40'\,28''$,	$\gamma_2 = 224^0\,30'\,1''$
3.	$a = 162^0\,1'\,50''$,	$\alpha = 47^0\,12'\,20''$,	$\beta = 31^0\,44'\,—''$
	$b_1 = 12^0\,46'\,32''$,	$c_1 = 173^0\,20'\,10''$,	$\gamma_1 = 163^0\,58'\,38''$
	$b_2 = 169^0\,13'\,28''$,	$c_2 = 335^0\,49'\,18''$,	$\gamma_2 = 256^0\,57'\,18''$
4.	$a = 57^0\,19'\,30''$,	$\alpha = 52^0\,19'\,10''$,	$\beta = 115^0\,37'\,50''$
	$b_1 = 73^0\,31'\,14''$,	$c_1 = 30^0\,10'\,39''$	$\gamma_1 = 28^0\,12'\,20''$
	$b_2 = 106^0\,28'\,46''$,	$c_2 = 81^0\,49'\,41''$,	$\gamma_2 = 68^0\,33'\,26''$.

26.

Fläche des sphärischen Dreiecks.

Den Ueberschuß der Summe der Winkel eines sphärischen Dreiecks über 180^0 nennt man seinen sphärischen Exceß.

Lehrsatz. Die Fläche eines sphärischen Dreiecks verhält sich zur Fläche der Halbkugel wie sein sphärischer Exceß zu 360^0.

Beweis. Es ist $\triangle\,ABC + \triangle\,IBC = \frac{4\,r^2\,\pi\,.\,\alpha}{360^0}$,

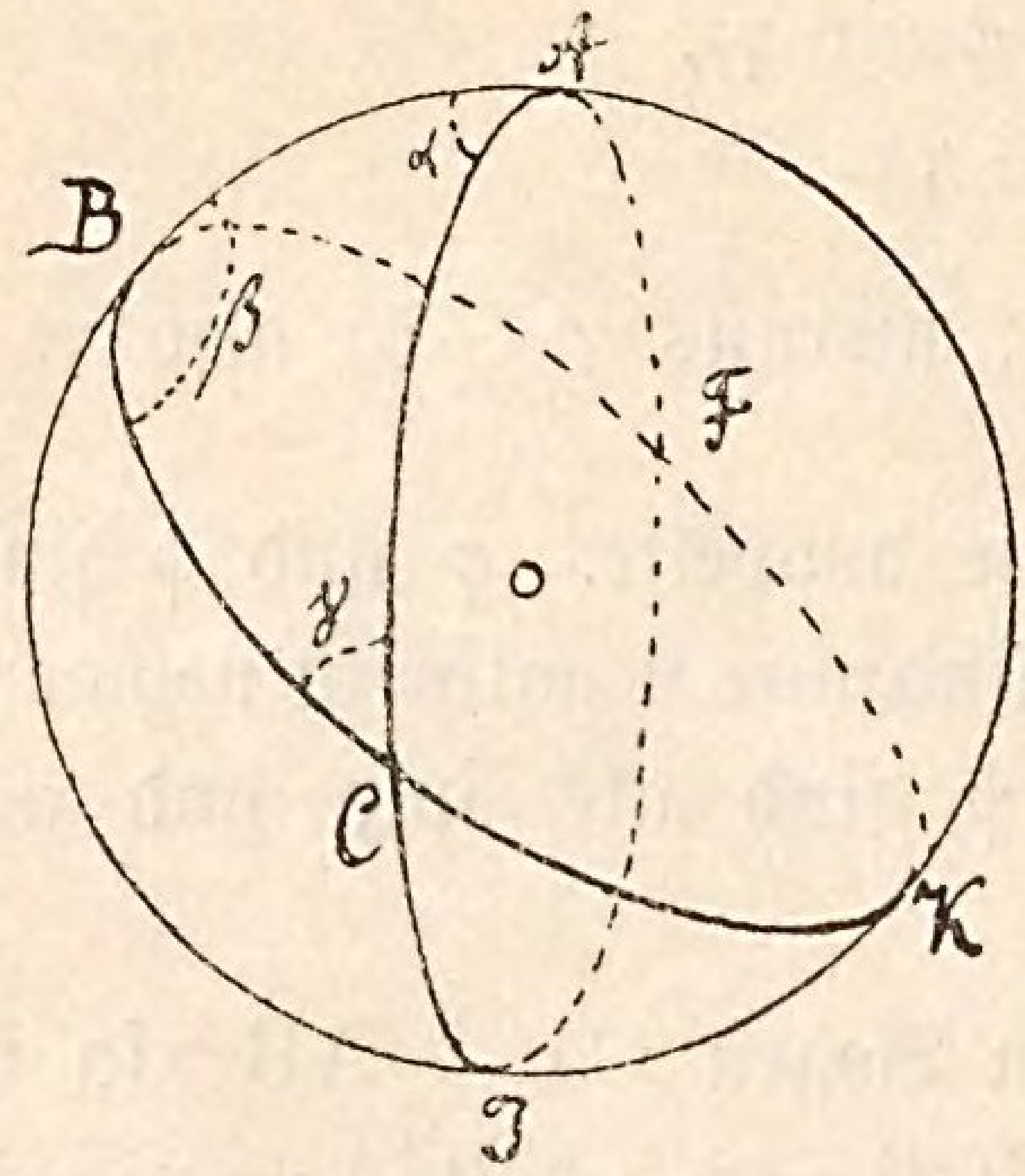


Fig. 29.

$$\triangle ABC + \triangle ACK = \frac{4\,r^2\pi\,.\,\beta}{360^0},$$

$$\triangle ABC + \triangle ABF = \frac{4\,r^2\pi\,.\,\gamma}{360^0}.$$

Addiert man beiderseits, indem man $\triangle$ ABF durch das gleich große $\triangle$ CIK ersetzt und die Summe der Dreiecke ABC + IBC + ACK + ICK durch die Halbkugel $2\,r^2\pi$ ersetzt, so ist:

$$2\,.\,\triangle ABC + 2\,r^2\pi = \frac{4\,r^2\pi}{360^0}(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$2\,.\,\triangle ABC = \frac{4\,r^2\pi}{360^0}(\alpha + \beta + \gamma - 180^0)$$

$$\text{also}\ \triangle ABC = \frac{2\,r^2\pi}{360^0}(\alpha + \beta + \gamma - 180^0).$$

Zusatz 1. Die Flächen zweier sphärischen Dreiecke verhalten sich wie ihre sphärischen Excesse.

Zusatz 2. Ist in einem sphärischen Dreieck jeder Winkel 180°, so ist es eine Halbkugel und sein sphärischer Exceß ist 360°.

VI. Aufgaben.

1. Man bestimme die Entfernung zweier durch ihre geographischen Längen l und Breiten b gegebenen Orte.

α) $b_1 = 52^0\,30'\,17''$, $l_1 = 0$ (Berlin) $b_2 = 48^0\,8'\,45''$,
$l_2 = 1^0\,47'\,12''$ (München)

β) $b_1 = 48^0 35'\,0{,}2''$, $l_1 = 5^0\,37'\,33''$ (Straßburg) $b_2 = 52^0\,13'\,6''$
$l_2 = -\,7^0\,38'\,6''$ (Warschau)

γ) $b_1 = 38^0\,42'\,31''$, $l_1 = 22^0\,34'\,52{,}5''$ (Lissabon)
$b_2 = 59^0\,56'\,29{,}7''$, $l_2 = -17^0\,44'\,19''$ (Petersburg)

δ) $b_1 = 38^0\,42'\,31''$, $l_1 = 22^0\,34'\,52{,}5''$ (Lissabon)
$b_2 = -\,22^0\,54'\,23{,}7''$, $l_2 = -\,56^0\,34'\,4{,}5''$ (Rio de Janeiro)

ε) $b_1 = 41^0\,53'\,53{,}5''$, $l_1 = 0^0\,54'\,50{,}4''$ (Rom)
$b_2 = -\,33^0\,51'\,41{,}1''$, $l_2 = -137^0\,50'\,38{,}5''$ (Sidney).

2. Die Höhen zweier Sterne sind $h_1 = 53^\circ 37$, und $h_2 = 17^\circ 41'$, der Unterschied ihrer Azimute ist $a = 48^\circ 20'$; wie groß ist der (sphärische) Abstand dieser Sterne?

Umgekehrt soll aus den Zenitabständen z_1 und z_2 zweier Sterne und ihrem sphärischen Abstand d die Differenz ihrer Azimute berechnet werden.

3. Zwei Orte von der gleichen geographischen Breite $\varphi = 48^\circ 54' 10''$ haben einen Längenunterschied von $20^\circ 38' 40''$. Um wie viel ist ihre Entfernung (längs des größten Kreises, = kürzeste Entfernung) verschieden von der Entfernung im Parallelkreis?

4. Um wie viel Uhr geht an einem Orte von der geographischen Breite φ ($= 48^0 8' 45''$ München, $= 52^0 30' 16{,}7''$ Berlin, $= 59^0 51' 29{,}4''$ Upsala, $= 41^0 53' 53{,}7''$ Rom) die Sonne am 1. Mai (Deklination $d = 15^0$) oder am längsten Tage ($d = 23^0 28'$) oder am 8. September ($d = 5^0 48'$) oder am 7. November ($d = -16^0 12'$) oder am kürzesten Tage ($d = -23^0 28'$) auf? Unter welchem Azimute geht sie auf?

5. Wie lange genießt die Nordfront eines Hauses, das genau in der Richtung von Ost nach Westen gebaut ist, und unter der geographischen Breite φ ($= 53^0 32' 45''$ Altona, $= 43^0 46' 4''$ Florenz) steht, die Morgensonne am 31. Mai (Deklination $d = 21^0 54'$) oder am 21. April ($d = 11^0 42'$)?

6. Wie stellt sich die Lösung der vorigen Aufgabe, wenn die Richtung des Hauses nicht von Ost nach West geht, sondern davon um $a = 6^0 20'$ nach Norden (oder nach Süden) abweicht.

7. Um wie viel Uhr bekommt und verliert die Südfront eines Hauses die Sonne am 20. Juli ($d = 20^0 48'$), wenn das Haus unter einer geographischen Breite von $50^0 56' 37{,}5''$ (Gotha) steht, und seine Front von der Ostwestrichtung um $a = 9^0 14'$ nach Süden (Norden) abweicht?

8. Welche Richtung hat der Schatten eines vertikalen Stabes auf einer horizontalen Ebene am 1. April ($d = 4^0 24'$) Vormittags $10^h 15'$ unter einer geographischen Breite $\varphi = 54^0 20' 29''$ (Kiel) und welche Höhe hat dabei die Sonne?

9. Um wie viel Uhr ist eine horizontale Straße, welche

mit der Südrichtung einen Winkel A = 24° 30′ (gegen Westen) einschließt, am 8. Oktober (d = — 5° 42′) schattenlos?

10. Um wie viel Uhr steht an einem Orte von der geographischen Breite φ = 46° 57′ 8,7″ (Bern) die Sonne am 29. August (d = 9° 30′) genau im Osten, und welche Höhe hat sie dann?

11. Umgekehrt soll aus der Zeit, in welcher die Sonne gerade im Osten (in dem durch den Ostpunkt gehenden Vertikalkreis, dem 1. Vertikal) steht und aus der Deklination der Sonne die Polhöhe gefunden werden. Oder es soll aus dieser Zeit und der Sonnenhöhe die Deklination und die Polhöhe gefunden werden.

12. Wie viel Uhr ist es, wenn an einem Orte von der geographischen Breite φ = 41° 12′ 10″ am 21. Mai (Deklination der Sonne = 20° 6′) Vormittags die Höhe der Sonne = 33° 16′ gemessen wurde?

13. Wie lange ist der Schatten eines senkrechten Stabes von 6,4 m Länge in der geographischen Breite φ = 50° 22′ bei einer Deklination der Sonne d = 19° 38′, wenn der Schatten genau nach Westen fällt?

14. Aus Azimut, Höhe und Stundenwinkel eines Sternes soll dessen Deklination und die geographische Breite des Beobachtungsortes berechnet werden.

15. Welchen Stundenwinkel hatte der Stern Regulus (α leon. maj. d = 12° 40′) in dem Moment, als an einem Orte mit der geographischen Breite φ = 20° 41′ 16″ seine Höhe = 57° 21′ 12″ gemessen wurde?

16. Aus Azimut, Höhe und Deklination eines Sternes soll dessen Stundenwinkel und die geographische Breite des Beobachtungsortes gefunden werden.

17. Allgemein soll man bei gegebener geographischer Breite φ aus Azimut A und Höhe h eines Sternes, dessen Deklination d und Stundenwinkel s finden, und umgekehrt soll man aus d und s (und φ) wieder A und h berechnen.

18. Aus der Rektascension a und Deklination d eines Sternes (Aequatorkoordinaten) soll man die astronomische Länge l

und Breite b desselben (Ekliptikkoordinaten) berechnen. (Schiefe der Ekliptik $e = 23^0\,28'$). Z. B.

$a = 76^0\,30'$, $d = 45^0\,51'$ (Capella, α Aurigae)
$a = 76^0\,54'$, $d = -8^0\,22'$ (Rigel, β Orionis)
$a = 99^0\,41'$, $d = -16^0\,31'$ (Sirius, α Can. maj.)
$a = 150^0\,10'$, $d = 12^0\,40'$ (Regulus, α Leon. maj.)
$a = 212^0\,16'$, $d = 19^0\,56'$ (Arcturus, α Bootis)
$a = 245^0\,8'$, $d = -26^0\,6'$ (Antares, α Scorp.)
$a = 278^0\,0'$, $d = 38^0\,39'$ (Wega, α Lyrae)
$a = 342^0\,24'$, $d = -30^0\,23'$ (Fomalhaut, α pisc. austr.)

19. Umgekehrt soll man aus der astronomischen Länge und Breite die Rektascension und Deklination bestimmen.

20. Aus der astronomischen Länge l der Sonne, deren Breite $= o$ ist, soll ihre Rektascension und Deklination berechnet werden.

21. Die Sonne befindet sich in einem Deklinationskreise, dessen Stundenwinkel s; auf einer horizontalen Ebene ist ein Stab in der Richtung der Weltachse (geographische Breite $= \varphi$) errichtet, man berechne die Richtung des Schattens dieses Stabes auf der horizontalen Ebene. (Horizontale Sonnenuhr).

22. Wie stellt sich die Lösung, wenn die Ebene nicht horizontal ist, sondern durch die Ostwestlinie geht und gegen die horizontale Ebene unter einem Winkel β geneigt ist (gegen Norden eine Neigung β hat).

23. Wie stellt sich die Lösung, wenn die Ebene nicht durch die Ostwestlinie geht, sondern durch eine Linie, welche mit dieser einen Winkel $\pm v$ einschließt.

24. Die Sonne befindet sich in einem Deklinationskreise, dessen Stundenwinkel s; auf einer vertikalen Ebene, welche durch die Ostwestlinie geht, ist ein Stab in der Richtung der Weltachse (geographische Breite $= \varphi$) angebracht; man berechne die Richtung des Schattens dieses Stabes auf der vertikalen Fläche (vertikale Sonnenuhr.)

25. Wie stellt sich die Lösung; wenn die vertikale Wand nicht durch die Ostwestlinie, sondern durch eine Linie geht, welche mit dieser einen Winkel v einschließt.

26. Der Stand der Sonne ist gegeben durch Deklination d und Stundenwinkel s (oder durch Azimut a und Höhe h); eine schiefe Gerade ist gegeben durch Azimut a_1 und Höhe h_1. Man soll die Richtung des Schattens dieses Stabes auf der horizontalen Ebene (oder auf einer vertikalen Wand) bestimmen.

27. In einem sphärischen Dreieck wird durch ein Eck ein zur gegenüberliegenden Seite senkrechter Bogen gelegt; man berechne die Länge dieses Bogens, die Abschnitte der gegenüberliegenden Seite und die Teile des Winkels, durch welchen der Bogen geht. (Diese Aufgabe löst die Aufgabe **25**. 5 und 6 auf leichte und übersichtliche Art.)

28. Der Inhalt einer dreiseitigen Pyramide (eines Parallelepipeds) soll aus drei in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten a, b, c und den von denselben gebildeten Kantenwinkeln α, β, γ berechnet werden.

29. Bei einem regulären Vierkant (5-, 6-, 8-, n-kant) beträgt der Kantenwinkel a^0, wie groß ist der Flächenwinkel?

30. Umgekehrt soll aus dem Flächenwinkel α eines regulären körperlichen n-Eckes der Kantenwinkel desselben berechnet werden.

Kgl. Hof- und Universitäts-Buchdruckerei von Dr. C. Wolf & Sohn in München

Winter, Wilhelm, Stereometrie. Lehrbuch und Aufgabensammlung für Schulen. M. 1.60.

— Lehrbuch der Physik zum Schulgebrauch bearbeitet. VIII u. 495 S. gr. 8⁰. 1886. M. 4.80. gebunden M. 5.20.

Günther, Siegmund, Grundlehren der mathematischen Geographie und elementaren Astronomie zum Gebrauche in höheren Mittelschulklassen und bei akademischen Vorträgen. Zweite, durchaus umgearbeit u. vermehrte Auflage. XI u. 157 S. gr. 8⁰. mit 52 Textillustrationen 1886. M. 2.

Knilling, Rudolf, Zur Reform des Rechenunterrichts in den Volksschulen.

Erste Abteilung. Mein Programm. — Kritik der pestalozzischen, grubeschen und gegenwärtigen Rechenmethode. IV u. 172 S gr. 8⁰. 1884. M. 1.40.

Zweite Abteilung. Fortsetzung und Schluß des theoretischen Teiles. Beschreibung des Rechentisches, Teillineals und verbesserten Zweisatzes. Praktischer Teil. VIII u. 268 S. gr. 8⁰. 1886. M. 3.60.

Recknagel, Georg, Ebene Geometrie für Schulen. Dritte verbesserte und vermehrte Auflage. Mit eingedruckten Holzschnitten. X u. 208 S. gr. 8⁰. 1885. M. 2.

— Thermometrische Versuche. Mit 1 lithograph. Tafel. [IV u.] 44 S. gr. 8⁰. 1863. M. —.60.

Schüler, Wilhelm Friedrich, Neue Theorie des Imaginären in der Funktionenrechnung und der analytischen Geometrie. 56 S. gr. 4⁰. 1878. M. 4.

— Lehrbuch der analytischen Geometrie des Punktes, der Geraden und der Kegelschnitte, dann der Strahlbüschel und Punktreihen (projektivische Geometrie). Mit Uebungsaufgaben. Mit 4 Tafeln in Steindruck. XI u. 247 S. gr. 8⁰. 1879. M. 4 80.

Sickenberger, A., Leitfaden der Arithmetik nebst Übungsbeispielen 4. Auflage. Mit 16 Holzschnitten. IV. u. 192 S. gr. 8⁰. 1888. M. 1.60.

— Leitfaden der elementaren Mathematik.

Erster Teil: Algebra. Zweiter Teil: Planimetrie. Dritter Teil: Stereometrie und Trigonometrie. 1888. à M. 1.20.

— Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafel zum Schul- und Handgebrauch zusammengestellt. 8 S. Lex. 8⁰. 1888. M. —.40

— Die Determinanten in genetischer Behandlung. Zur Einführung für Anfänger. Zweiter Abdruck. VII und 80 S. 8⁰. 1887. M. 1.60.

— Uebungsbuch zur Algebra. Teil 1. 102 S. gr. 8⁰. 1890. M. 1.20. kart. „ 1.30.

Walberer, Joh. Chr., Anfangsgründe der Mechanik fester Körper mit vielen Übungsaufgaben zum Schulgebrauche an Gymnasien und verwandten Lehranstalten. Fünfte durchgesehene Auflage. Mit 52 Holzschnitten. VI u. 166 S. gr. 8⁰. 1885. M. 2.40.

— Leitfaden zum Unterrichte in der Arithmetik und Algebra an Gymnasien und verwandten Anstalten. Zweite, durchgesehene und mit Übungsbeispielen versehene Auflage. VII u. 152 S. gr. 8⁰. 1884. M. 1.60.

Wenz, G., Zusammenstellung der wichtigsten arithmetischen und algebraischen Sätze in Formel, Wort und Beispiel. Ein Handbüchlein für den Rechen-Unterricht.

Erste Abteilung: Die Rechnungsarten für die Volks- und Mittelschulen. [IV u.] 32 S. 8⁰. 1873. M. —.30.

Zweite Abteilung: Die Rechnungsarten für die höheren Lehranstalten. [IV. u.] 58 S. 8⁰. 1873. M. —.45.

K. Hof- und Universitäts-Buchdruckerei von Dr. C. Wolf & Sohn.

Winter, Wilhelm

Trigonometrie Lehrbuch und Aufgabensammlung für Schulen

München 1890